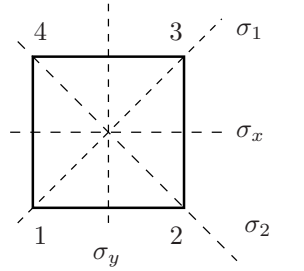


A 10.4 és 10.5 feladatok megoldása

Az órán bevezetett jelöléseket használjuk. Megállapítottuk, hogy a vizsgált csoport a négyzet szimmetriacsoportjával (azaz C_{4v} -vel) izomorf, ennek a jelöléseit használjuk. f -fel jelöljük a $\odot$ irányú 90 fokos forgatást, a tükrözések pedig a következők:



A szorzótábla:

C_{4v}	e	f	f^2	f^3	σ_1	σ_2	σ_x	σ_y
e	e	f	f^2	f^3	σ_1	σ_2	σ_x	σ_y
f	f	f^2	f^3	e	σ_y	σ_x	σ_1	σ_2
f^2	f^2	f^3	e	f	σ_2	σ_1	σ_y	σ_x
f^3	f^3	e	f	f^2	σ_x	σ_y	σ_2	σ_1
σ_1	σ_1	σ_x	σ_2	σ_y	e	f^2	f	f^3
σ_2	σ_2	σ_y	σ_1	σ_x	f^2	e	f^3	f
σ_x	σ_x	σ_2	σ_y	σ_1	f^3	f	e	f^2
σ_y	σ_y	σ_1	σ_x	σ_2	f	f^3	f^2	e

(1)

amelyben pirossal jelöltük a $H = \{e, f^2, \sigma_1, \sigma_2\}$ részhalmaz elemeit és ezek szorzatait. Egyből látszik, hogy a szorzás nem vezet ki H -ból, tehát – mivel H minden elemének inverze is benne van (véges csoportnál a szorzás zártóságából ez következik is) – $H < C_{4v}$. Mivel $|H| = 4$, ami pontosan fele C_{4v} rendjének, ezért H -nak csak egyetlen mellékosztálya van (amely négyelemű és H -val diszjunkt), tehát a bal- és jobboldali mellékosztályai megegyeznek, azaz 10.4(1)-re a válasz: igen. Hogy $fH = Hf$, a szorzótábla második (f -hez tartozó) sorából és oszlopából közvetlenül is leolvasható: $fH = \{f, f^3, \sigma_y, \sigma_x\} = Hf$.

$K = \{e, \sigma_1\}$ csoport, tehát H -nak is és C_{4v} -nek is részcsoportha. Mivel rendje fele H -énak, ezért H -nak egyben normálosztója is. Ugyanakkor C_{4v} -nek nem, hiszen pl. $fK = \{f, \sigma_y\} \neq Kf = \{f, \sigma_x\}$, azaz nem egyeznek meg a bal- és jobboldali mellékosztályai.

A 10.5-ben kért H mellékosztályait már megadtuk. K -nak négy bal- és négy jobboldali mellékosztálya van (hiszen $|C_{4v}| = 4|K|$), és mint láttuk, a két oldalhoz tartozó mellékosztályok nem egyeznek meg, mind a nyolcat meg kell adnunk. A baloldaliak pl. így írhatók föl: $K = \{e, \sigma_1\}$, $fK = \{f, \sigma_y\}$, $f^2K = \{f^2, \sigma_2\}$ és $f^3K = \{f^3, \sigma_x\}$.

Hátravan még C_{4v} konjugált osztályainak megadása. Mint mindig, $\{e\}$ egyedül van. $\sigma_x^{-1}f\sigma_x = f^3$ és más elem nem tartozik ide (f -et bármelyik tükrözéssel konjugálva f^3 -öt kapjuk, a többi elem pedig kommutál f -fel), tehát egy másik osztály: $\{f, f^3\}$. f^2 a csoport minden elemével kommutál (a szorzótábla 3. sora ill. oszlopa szimmetrikus a főátlóra), tehát ő is egyedül alkot egy osztályt: $\{f^2\}$. Aztán $f\sigma_1 = \sigma_2f$ és $f\sigma_x = \sigma_yf$, ugyanakkor σ_1 és σ_x nem egymás konjugáltjai, tehát két osztály maradt még: $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ és $\{\sigma_x, \sigma_y\}$.

Megfigyelhető, hogy C_{4v} konjugált elemosztályai az órán is megbeszélt általános szabálynak megfelelnek: az ekvivalens (azaz szimmetriatranszformációval egymásba vihető) tengelyek mentén/síkokra stb. vett tükrözések/azonos szögű elforgatások tartoznak egy-egy konjugált elemosztályba.