Matmódsz gyak. 8./1

20100412

A 8.4 feladat megoldása

Először a 8.4 (2) egy módosított változatát nézzük

8.4 (2')

$$u_t = \alpha u_{xx} + e^{-t} \cos x \qquad (a) \qquad (\forall x, t)$$

$$u(x, t=0) = \cos x \qquad (b) \qquad (\text{határfeltétel})$$

Keressük $u(x,t) = A(x)\,B(t)$ alakban a megoldást. (Ez olyan, mint a diadikus szorzat. Nem mindig működik, de $u(x,t) = \sum_n A_n(x) B_n(t)$ rendszerint igen.)

A határfeltételből: $A(x)\,B(0) = \cos x$ ($u = A \cdot B$ miatt a csomópont ($\cos x = 0$) örökre csomópont marad.)

Mivel A és B között egy számfaktort lehet tologatni [azaz $u = A \cdot B = (\eta \cdot A) \cdot (B/\eta)$], nem megszorítás, ha az $A(x) = \cos x$, $B(0) = 1$ választást tesszük. Most így (a)-ba az $u(x,t) = A(x)\,B(t) = \cos x \cdot B(t)$-t: $\dot{B}(t) \cos x = \alpha\, B(t) \cdot (-\cos x) + e^{-t} \cos x$ ($\forall x, t$-re), azaz (mivel $\exists x$, hogy $\cos x \neq 0$): $\dot{B}(t) = -\alpha\, B(t) + e^{-t}$ ($\forall t$). & $B(0) = 1 \equiv B_0$.

Ezt a már ismert módon átírjuk kauzális disztribúcióegyenletté, és Fourier-trafóval oldjuk meg: $f(t) = \Theta(t)\,B(t) \Rightarrow \dot{f}(t) = \delta(t)\, B(t) + \Theta(t)\,\dot{B}(t) = B(0)\,\delta(t) + \Theta(t)\,\dot{B}(t)$.

$$\dot{f}(t) + \alpha f(t) = B(0)\,\delta(t) + \Theta(t)\underbrace{\left[\dot{B}(t) + \alpha B(t)\right]}_{e^{-t}}$$

; a Fourier-komponensek:

$$-i\omega f_\omega + \alpha f_\omega = B(0) + \frac{1}{-i\omega + 1}, \quad \text{azaz} \quad f_\omega = \frac{-i\omega B_0 + B_0 + 1}{(-i\omega+1)(-i\omega+\alpha)} = \frac{i\omega B_0 - (B_0+1)}{(\omega+i)(\omega+i\alpha)}$$

$f(t)$ csak akkor kauzális, ha $\alpha \geq 0$ (mert különben f_ω-nak volna pólusa az $\operatorname{Im}\omega > 0$ félsíkon), amit már egyszer feltettünk az $f(t) = \Theta(t)\,B(t)$ alakkal. ($\alpha < 0$-ra is van megoldása $B(t)$-nek, ill. $u(x,t)$-nek, de akkor vagy az antikauzális $f(t) = \Theta(-t)\,B(t)$ alakot kell Fourier-trafózni v. például az állandók variálásának módszerével kell meghatározni $B(t)$-t.)

Kössük ki tehát $\alpha \geq 0$-t. Ekkor $f(t) \equiv 0$ $\forall t < 0$-ra, ill. $t > 0$-ra:

$$f(t) = \oint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{i\omega B_0 - (B_0+1)}{(\omega+i)(\omega+i\alpha)} \cdot e^{-i\omega t} \; \cancel{(\alpha \neq 1) = \frac{-2\pi i}{2\pi}\left[\frac{i\omega B_0 - (B_0+1)}{\omega+i\alpha}\Big|_{\omega=-i} + \frac{i\omega B_0 - (B_0+1)}{\omega+i}\Big|_{\omega=-i\alpha}\right]}$$

$$\cancel{= i\left(B_0 - (B_0+1)\right.}$$

A Cauchy-tétel használatához az $\alpha = 1$ és $\alpha \neq 1$ eseteket különválasztjuk: %

Matmódszer gyak. 8/2

2010.04.12

$\alpha \neq 1$ esetén 2db elsőrendű pólust zár be a hurok:

$$f(t) = \frac{-2\pi i}{2\pi}\left[\frac{1}{0!}\left(\frac{d}{d\omega}\right)^0 \frac{i\omega B_0-(B_0+1)}{\omega+i\alpha}\, e^{-i\omega t}\Big|_{\omega=-i} + \frac{1}{0!}\left(\frac{d}{d\omega}\right)^0 \frac{i\omega B_0-(B_0+1)}{\omega+i}\, e^{-i\omega t}\Big|_{\omega=-i\alpha}\right] =$$

$$= -i\left[\frac{B_0-(B_0+1)}{i(\alpha-1)}e^{-t} + \frac{\alpha B_0-(B_0+1)}{-i(\alpha-1)}e^{-\alpha t}\right] \underset{B_0=1}{=} \frac{\alpha-2}{\alpha-1}e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha-1}e^{-t} \qquad (\forall t>0)$$

$\alpha = 1$ esetén 1db másodrendű pólus:

$$f(t) = \frac{-2\pi i}{2\pi}\left[\frac{1}{1!}\left(\frac{d}{d\omega}\right)^1\left[\left(i\omega B_0-(B_0+1)\right)\cdot e^{-i\omega t}\right]\right]\Big|_{\omega=-i} = \frac{-2\pi i}{2\pi}\left[iB_0 e^{-i\omega t} + (-it)\left(i\omega B_0-(B_0+1)\right)e^{-i\omega t}\Big|_{\omega=-i}\right] =$$

$$= -i\, e^{-t}\left[iB_0 + \cancel{B}(-it)\cdot(-1)\right] = e^{-t}(B_0+t) = (1+t)e^{-t} \qquad (\forall t>0)$$

$B(t)$ a fenti $f(t)$ analitikus kiterjesztése a $t<0$ tartományra (azaz a $\Theta(t)$ helyéről). Összefoglalva:

$$u(x,t) = A(x)\cdot B(t) = \cos x \cdot \begin{cases}(1+t)e^{-t} & \text{ha } \alpha=1\\ \frac{\alpha-2}{\alpha-1}e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha-1}e^{-t} & \text{ha } \alpha\neq 1\end{cases} \quad (\text{és } \alpha \geq 0)$$

Az általánosított $f(t)$-vel vagy az állandók variálásával kiderül, hogy ez a feltétel nem kell.

<u>Megjegyzés</u>: Úgy is megoldhattuk volna az (a) egyenletet, hogy azt tesszük [illegible], és mindkét változóban Fourier-transzformálunk: $f(x,t) = u(x,t)\cdot\Theta(t) \Rightarrow \dot f(x,t) = \underbrace{u(x,t=0)}_{\cos x}\delta(t) + \dot u(x,t)\Theta(t)$

$$\dot f(x,t) - \alpha f''(x,t) = \underbrace{u(x,t=0)}_{\cos x}\delta(t) + \underbrace{\left[\dot u(x,t) - \alpha u''(x,t)\right]}_{e^{-t}\cdot\cos x}\Theta(t) = \cos x \cdot \left[\delta(t) + \Theta(t)e^{-t}\right]$$

Fourier-térben: $f(x,t) = \int\frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{dq}{2\pi}\, e^{i(qx-\omega t)} f_{q\omega}$; $\widehat{\cos x}(q) = \widehat{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}(q) = \frac{1}{2}\left[2\pi\,\delta(q-1) + 2\pi\,\delta(q+1)\right]$

$$\left[-i\omega - \alpha(iq)^2\right]f_{q\omega} = \pi\left[\delta(q-1)+\delta(q+1)\right]\cdot\left[1+\frac{1}{-i\omega+1}\right] \Rightarrow f_{q\omega} = \pi\frac{-i\omega+2}{(-i\omega+1)(-i\omega+\alpha q^2)}\left[\delta(q-1)+\delta(q+1)\right]$$

Először q szerint elvégezve a visszatrafót:

$$f_\omega(x) = \int\frac{dq}{2\pi} f_{q\omega}\, e^{iqx} = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi\cdot\frac{-i\omega+2}{-i\omega+1}\cdot\left[\frac{e^{iqx}}{-i\omega+\alpha q^2}\Big|_{q=1} + \frac{e^{iqx}}{-i\omega+\alpha q^2}\Big|_{q=-1}\right] = \cancel{\frac{2\pi}{2\pi}}\frac{-i\omega+2}{(-i\omega+1)(-i\omega+\alpha)}\cdot\underbrace{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}_{\cos x}$$

Az ω szerinti trafó pedig ugyanúgy megy, mint az előbb.

Matmódsz gyak. 8./3

20100412

A 8.4(2) megoldása: $\dot{u}(x,t)=\alpha u''(x,t)+e^t\cos x$ & $u(x,t=0)=\cos x$.

Ha Fourier-trafóval oldjuk meg, a t-függésnél figyelni kell, hogy $\Theta(t)\,e^t$-nek nincs trafója, ezért inkább az $f_a(t)=B(t)\,\Theta(-t)$-re kell egyenletet szerkeszteni. (ld. még: fourier.pdf a honlapon.)

A 8.4(1) megoldása: $\dot{u}(x,t)=4u''(x,t)+t+e^t$ & $u(x,t=0)=2$

próbafv: $u(x,t)=A(x)\cdot B(t)$; a peremfeltételbe beírva: $A(x)\cdot B(0)=2$, azaz $A(x)=\text{konst}$! (Nincs térfüggés se $t=0$-ban, se később.) A mozgásegyenlet:

* $A(x)\cdot\dot{B}(t)=4\cdot\underbrace{A''(x)}_{0}\cdot B(t)+t+e^t$. Legyen $A(x)\equiv 1$, ekkor $B(0)=2$.

$\dot{B}(t)=t+e^t$, ezt elég integrálni: $B(t)=B(0)+\int_0^t dt'(t'+e^{t'})=2+\frac{t^2}{2}+(e^t-1)$,

azaz $u(x,t)=1+\frac{t^2}{2}+e^t$.

*: Itt szerencsénk volt, könnyen lehetett volna ez az egyenlet ellentmondásos, de most mind a peremfeltétel, mind a mozgásegyenlet kompatibilis volt az $A(x)\cdot B(t)$ alakkal.

Egyéb hasonló feladatok (gyakorlásra):

(a) $\dot{u}=u''+3t^2$ $\quad u(x,t=0)=\sin x$

(b) $\dot{u}=u''+e^t\sin x$ $\quad u(x,t=0)=\sin x$