Matmódsz. gyak. 7/5

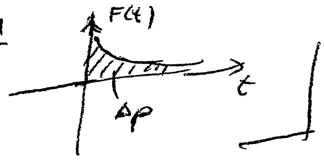
20100329/5

7.2 (1') (Az (1) példa egy változata.)

$\ddot{u}(t) = \gamma\, e^{-\alpha t}$, ahol $\alpha > 0$, és a kezdőfeltételek: $u(0)=u_0$, $\dot{u}(0)=v_0$.

Mechanika: $m\ddot{u}(t) = F(t) = m\gamma\, e^{-\alpha t}$ külső erő hat egy szabad tömegpontra.

Az $F(t)$-hez asszociált impulzus: $\Delta p = \int_0^\infty dt\, F(t) = \frac{m\gamma}{\alpha}$



Keressük a $t>0$-ra a megoldást, de most u helyett az $f(t)$ disztribúcióra, ahol $f(t) = \Theta(t)\cdot u(t)$.

$\dot{f}(t) = \delta(t)\cdot u(t) + \Theta(t)\,\dot{u}(t) = u_0\,\delta(t) + \Theta(t)\,\dot{u}(t)$

$\ddot{f}(t) = u_0\,\dot{\delta}(t) + v_0\,\delta(t) + \Theta(t)\,\underbrace{\ddot{u}(t)}_{=\,\gamma e^{-\alpha t}}$ a kiinduló diffegy. alapján

A Fourier-komponensekkel kifejezve a fenti egyenletet $\left(f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f_\omega\right)$:

$(-i\omega)^2 f_\omega = u_0\cdot(-i\omega)\cdot 1 + v_0\cdot 1 + \gamma\,\frac{1}{-i\omega+\alpha}$, amiből:

$$f_\omega = \frac{u_0}{-i\omega} + \frac{v_0}{(-i\omega)^2} + \frac{\gamma}{(-i\omega)^2(-i\omega+\alpha)} = \frac{iu_0}{\omega} + \frac{-v_0}{\omega^2} + \frac{-i\gamma}{\omega^2(\omega+i\alpha)}$$

1 2 3

Az $f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f_\omega$ inverz traf.-t tagonként számolom ki, az $\omega=0$ pólusokat az alsó félsíkba „tolom": $\omega + i0$-t írok a nevezőbe ω helyett.

Ennek hatására a felső félsíkban nem lesz pólus, ami miatt $t<0$-ra, amikor felfelé zárom be a kiintegráláshoz tartozó kontúrt, $f(t) \equiv 0$ lesz.

A $t>0$ eredményei az egyes tagok Fourier-trafói:

$$f_1(t) = \oint \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{iu_0}{\omega} = \frac{-2\pi i}{2\pi}\, \frac{1}{0!}\left(\frac{d}{d\omega}\right)^0 iu_0 e^{-i\omega t}\Big|_{\omega=0} = u_0$$

negatív irány

1. rendű pólus az $\omega=0$-ban

$$f_2(t) = \oint \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}\cdot\frac{-v_0}{\omega^2} = \frac{-2\pi i}{2\pi}\, \frac{1}{1!}\underbrace{\left(\frac{d}{d\omega}\right)^1 -v_0 e^{-i\omega t}}_{-v_0\cdot(-it)\cdot\underbrace{e^{-i\omega 0}}_{1}}\Big|_{\omega=0} = v_0\cdot t$$

Matmódsz. gyak 7/5a

20100329/5a

(7.2 (1') folytatása)

$$f_3(t) = \oint \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{-i\gamma}{\omega^2(\omega+i\alpha)} = \frac{-2\pi i}{2\pi}\cdot(-i\gamma)\left[\frac{1}{1!}\left(\frac{d}{d\omega}\right)^1 \frac{e^{-i\omega t}}{\omega+i\alpha}\bigg|_{\omega=0} + \frac{1}{0!}\left(\frac{d}{d\omega}\right)^0 \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2}\bigg|_{\omega=-i\alpha}\right] =$$

$$= -\gamma\left[\frac{-it\cdot e^{-i\omega t}(\omega+i\alpha) - e^{-i\omega t}\cdot 1}{(\omega+i\alpha)^2}\bigg|_{\omega=0} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2}\bigg|_{\omega=-i\alpha}\right] =$$

$$= -\gamma\left(\frac{(-it)\cdot(i\alpha)-1}{(i\alpha)^2} + \frac{e^{-\alpha t}}{(-i\alpha)^2}\right) = \frac{\gamma}{\alpha^2}\left[\alpha t - 1 + e^{-\alpha t}\right]$$

Összefoglalva:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t<0 \\ u_0 + (v_0+\frac{\gamma}{\alpha})t - \frac{\gamma}{\alpha^2}(1-e^{-\alpha t}) & \text{ha } t\geq 0 \end{cases}$$

„innen indul" „aszimptotikus sebesség" „tranziens korrekció az egyenletes mozgáshoz képest"

Az eredeti feladat $u(t)$ megadása: $u(t) \equiv f(t)$ $(t\geq 0)$, $t<0$-ra pedig ennek „sima" (analitikus) kiterjesztése.

Megjegyzések:

1. Lehetne $f(t)$ kiszámításához akár f_ω közös nevezőre hozott alakjára használni a Cauchy-formulát (csak bonyolultabb lenne):

$$f_\omega = \frac{iu_0\omega(\omega+i\alpha) - v_0(\omega+i\alpha) - i\gamma}{\omega^2(\omega+i\alpha)} = \frac{iu_0\omega^2 - (u_0\alpha+v_0)\omega - i(v_0\alpha+\gamma)}{\omega^2(\omega+i\alpha)} = \frac{c(\omega)}{\omega^2(\omega+i\alpha)}$$

Erre $t<0$-ra ugyanúgy $f(t)\equiv 0$ (ha az $\omega=0$ pólust az alsó félsíkba tolom), ill. $t>0$-ra:

$$f(t) = \oint \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}\frac{c(\omega)}{\omega^2(\omega+i\alpha)} = \frac{-2\pi i}{2\pi}\left[\frac{1}{1!}\left(\frac{d}{d\omega}\right)^1 \frac{c(\omega)e^{-i\omega t}}{\omega+i\alpha}\bigg|_{\omega=0} + \frac{1}{0!}\left(\frac{d}{d\omega}\right)^0 \frac{c(\omega)e^{-i\omega t}}{\omega^2}\bigg|_{\omega=-i\alpha}\right] = \ldots$$

2. Az $\omega=0$ pólust muszáj az alsó félsíkba tolni, mert ha f_ω-nak lenne a felsőben pólusa, az ellentmondana a kiinduló $f(t)=\Theta(t)u(t)$ feltételnek (mivel akkor $f(t)\equiv 0$ $(\forall t<0)$ nem teljesülhetne).