

Mat. módszer 5. gár, kiegészítés/1

5.5. feladat

Már láttuk, hogy $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$, ahol $\delta_a(x) = \delta(x-a)$

$$n=2 \text{ -re } (\alpha \delta_a + \beta \delta_b) * (\alpha \delta_a + \beta \delta_b) = \alpha^2 \delta_{2a} + 2\alpha\beta \delta_{a+b} + \beta^2 \delta_{2b}$$

n tényezőjűs:

$$(\alpha \delta_a + \beta \delta_b) * (\alpha \delta_a + \beta \delta_b) * \dots * (\alpha \delta_a + \beta \delta_b)$$

Amikor bevezetjük, ez 2^n darab tag, pl. $\underbrace{\beta \delta_b * \beta \delta_b * \alpha \delta_a * \dots * \beta \delta_b}_{n \text{ db}}$.

* konvolúció kommutatív, ezért nem számít a tényezők sorrendje.

Teljesen pl. $\binom{n}{3}$ -szor lesz olyan tag, amelyben ~~3-szor~~ 3 db $\alpha \delta_a$ és $(n-3)$ db $\beta \delta_b$ van, azaz

$$(\alpha \delta_a + \beta \delta_b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} \delta_{ka + (n-k)b}$$

(A gondolatmenet az, mint az $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ kifejtésnél.)

Mat. módszer 5. gyl, kiegemítés/2

5.6. feladat

Reguláris disztribúció def Előáll lokálisan integrálható függvénygel való integrálhatóságot.

Lokálisan integrálható def

Az értelmezési tartományához minden kompakt részhalmazaiban létezik (veges) az integrálja.

A feladatban az origó körüli tartományokra vett integrálással lehet baj. Mivel $f(x)$ integrálját az origó körüli R

sugarú gömbre:

$$I = \int dV f(x) = \int_0^R dr \underbrace{\frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} r^{D-1}}_{\text{r sugarú D dimenziós gömb "felszíne"}} \cdot \frac{1}{r} = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int_0^R dr r^{D-2} = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \begin{cases} \frac{R^{D-1}}{D-1}, & D > 1 \\ \infty, & \text{egyll- ként} \end{cases}$$

Az r sugarú D dimenziós gömb "felszíne".

Válassz. $D=1$ -ben az integrál divergens, azaz ugyan $f(x)$ -ből nem ~~hat~~ képzhetünk disztribúciót.

$D > 1$ esetén $f(x)$ lokálisan integrálható, ezért asszociálható hozzá disztribúció (amely definíció szerint reguláris).