

Az 1.2 feladat megoldása

A lineáris (euklideszi) térünk a $(V, +, \mathbb{R}, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, amely a legfeljebb harmad fokú valós polinomokat tartalmazza a pontonkénti $+$ és $\cdot$ műveletekkel és a

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(x) v_2(x) e^{-x^2} dx \quad (\forall v_{1,2} \in V)$$

skalárszorzással. A feladatban megadott

$$e_j = x^j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in V$$

polinomok (vektorok) triviálisan bázist alkotnak V -ben.

Határozzuk meg először az ehhez a bázishoz tartozó alaplátrixot! A

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^i x^j e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^{i+j} e^{-x^2} dx =: I_{i+j}$$

jelölést bevezetve parciális integrálással rekuziós formulát kapunk I_n -re:

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-1} (-2x e^{-x^2}) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (n-1) x^{n-2} e^{-x^2} dx = \frac{n-1}{2} I_{n-2} \quad .$$

A feladatban megadott $I_0 = \sqrt{\pi}$ -t felhasználva a páros n -ekre:

$$I_0 = \sqrt{\pi} \quad I_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad I_4 = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \quad I_6 = \frac{15}{8} \sqrt{\pi} \quad ,$$

a páratlanokra pedig nyilván $I_n = 0$. Most már felírhatjuk az alaplátrixot:

$$g_{ij} = \sqrt{\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{15}{8} \end{pmatrix} \quad .$$

Látható, hogy két egymásra merőleges altér direkt összegére bontható V (az egyikben a páros, a másikban a páratlan függvények vannak – két ilyen skalárszorzata mindig 0). Hogy ez a két altér szemre is szétváljon egymástól, vezessük be az

$$f_0 = e_0 \quad f_1 = e_2 \quad f_2 = e_1 \quad f_3 = e_3$$

bázist, amelyben a

$$g_{i'j'} = \sqrt{\pi} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{15}{8} \end{pmatrix}$$

alaplátrix már blokkdiagonális. Határozzuk most meg az $f_{j'}$ bázis duálisát az

$$f^{j'} = g^{i'j'} f_{j'} \quad (1)$$

összefüggéssel! $g_{i'j'}$ blokkonként invertálható, amivel

$$g^{i'j'} = (g_{i'j'})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad .$$

Most már az (1) egyenlet alapján mindkét duális bázis elemeit könnyen kiszámíthatjuk:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}^0 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{2} \mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_1 \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{2} \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{2} - x^2 \right) &= \mathbf{e}^0 \\
 \mathbf{f}^1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(-\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(-\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(-1 + x^2 \right) &= \mathbf{e}^2 \\
 \mathbf{f}^2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(5\mathbf{f}_2 - 2\mathbf{f}_3 \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(5\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3 \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(5x - 2x^3 \right) &= \mathbf{e}^1 \\
 \mathbf{f}^3 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(-2\mathbf{f}_2 + \frac{4}{3}\mathbf{f}_3 \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(-2\mathbf{e}_1 + \frac{4}{3}\mathbf{e}_3 \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(-2x + \frac{4}{3}x^3 \right) &= \mathbf{e}^3 \quad .
 \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy ugyenezen a V vektortéren sokféleképpen lehet skalárszorzatot bevezetni. Az ezek szerinti ortogonális bázisokat ortogonális polinomoknak nevezzük. Az alkalmazásokban gyakran előforduló példák:

Legendre: $\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = \delta_{nm} \frac{2}{2n+1}$

Csebishev: $\int_{-1}^{+1} T_n(x) T_m(x) (1-x^2)^{-1/2} dx = \delta_{nm} \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{n0})$

Laguerre: $\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm} (n!)^2$

Hermite: $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \delta_{nm} 2^n n!^2 \sqrt{\pi} \quad .$