

1. A Fourier-transzformáció

A valós tér változóját t , a Fourier-térét ω jelöli. Egyelőre csak egy dimenziót tekintünk. t és ω is lehet diszkrét vagy folytonos, illetve korlátos vagy végtelen (persze nem függetlenül). Az alábbiakban úgy normálunk, hogy a konvolúció az ω -térben prefaktorok nélküli szorzásnak feleljen meg (azaz $h_\omega = f_\omega g_\omega$), ami ekvivalens azzal, hogy a Dirac/Kronecker-delta minden Fourier-komponense 1.

Változók	Transzformáció	A δ előállítása
$t \in \mathbb{R}$ folytonos	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f_\omega e^{-i\omega t}$	$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} = 2\pi\delta(t)$
$\omega \in \mathbb{R}$ folytonos	$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}$	$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} = 2\pi\delta(\omega)$
$t \in [-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$ folytonos	$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{\omega} f_\omega e^{-i\omega t}$	$\sum_{\omega} e^{-i\omega t} = T\delta(t)$
$\omega \in \frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}$ diszkrét	$f_\omega = \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) e^{i\omega t}$	$\int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\omega t} = T\delta_{\omega,0}$
$t \in a\mathbb{Z}$ diszkrét	$f(t) = a \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d\omega}{2\pi} f_\omega e^{-i\omega t}$	$\int_{-\pi/a}^{\pi/a} d\omega e^{-i\omega t} = \frac{2\pi}{a}\delta_{t,0}$
$\omega \in [-\frac{\pi}{a}; \frac{\pi}{a}]$ folytonos (végtelen rács, „ a ” rácsállandó)	$f_\omega = \sum_t f(t) e^{i\omega t}$	$\sum_t e^{i\omega t} = \frac{2\pi}{a}\delta(\omega)$
$t = aj$ véges rács	$f(t) = \frac{1}{N} \sum_{\omega} f_\omega e^{-i\omega t}$	$\sum_{\omega} e^{-i\omega t} = N\delta_{t,0}$
$\omega = \frac{2\pi}{Na}j$ véges rács ($j = 0, \dots, N-1$ v. $[-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}]$)	$f_\omega = \sum_t f(t) e^{i\omega t}$	$\sum_t e^{i\omega t} = N\delta_{\omega,0}$

1. táblázat. A Fourier-transzformált előállítása.

Több dimenzióra az általánosítás nyilvánvaló. A fizikusok konvenciója még, hogy a térváltozók Fourier-transzformációjánál az i előjelét megfordítjuk, hogy az $f_{\mathbf{q},\omega}$ a $\mathbf{q}$ irányban propagáló hullám amplitúdóját adja meg (ráadásul relativisztikus formalizmusban is így egyszerűbb a jelölés: $k_\mu x^\mu = \omega t - \mathbf{q}\mathbf{x}$):

$$f(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{q} d\omega}{(2\pi)^4} f_{\mathbf{q},\omega} e^{-i(\omega t - \mathbf{q}\mathbf{x})} \quad , \quad f_{\mathbf{q},\omega} = \int d^3\mathbf{x} dt f(\mathbf{x}, t) e^{i(\omega t - \mathbf{q}\mathbf{x})} \quad .$$

[A Maple9 (inv)fourier() függvénye az $x \rightarrow q$ -nak ($q \rightarrow x$ -nek) megfelelő transzformációt hajtja végre.]

Az egyéb konvenciókhoz képest előny, hogy a transzformációt körfrekvencia helyett frekvenciával felírva [$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu f_\nu e^{-i2\pi\nu t}$ és $f_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i2\pi\nu t}$ – ilyenkor sehol sincs $1/2\pi$], a Fourier-komponensek egyszerűen azonosíthatók az $f_\omega \leftrightarrow f_{\nu=\omega/2\pi}$ áttéréskor. Ezenkívül az $\omega/2\pi$ -nek, ill. $q/2\pi$ -nek fizikai jelentése is van (hullámok száma idő-, ill. hosszegységenként).

A diszkrétből folytonos ω -ba való átmenetet a következő módon lehet elvégezni, ha egy periodikus $f(t)$ függvényből indulunk ki (diszkrét ω), amelynek azután a periódusát a végtelenbe vesszük (folytonos ω) úgy, hogy az egyes periódusok közé fokozatosan egyre hosszabb $f(t) \equiv 0$ szakaszokat szúrunk be (a végén a függvény tartója az eredeti periódushossz):

$$\frac{1}{T} \sum_{\omega} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \quad \text{vagy térben} \quad \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} \rightarrow \int \frac{d^D\mathbf{q}}{(2\pi)^D} \quad , \quad (1)$$

ahol V a(z $\mathbf{x}$ által bejárt, véges) térfogat.

Amikor t diszkrét, az f_ω helyett $a f_\omega$ -t is ésszerű lenne használni Fourier-komponenseknek (akkor az $a \rightarrow 0$ határesetben visszakapnánk a folytonos képleteket, ill. a mértékegységek megegyeznének a négy változatban), csak akkor a konvolúciót így kellene velük kiszámítani: $ah_\omega = a f_\omega a g_\omega / a$.

Gyakran használt összefüggés még a Parseval-formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f^*(t)g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f_\omega^* g_\omega$$

és a Cauchy-féle integrálformula (az óramutató járásával szemben egy zárt görbe mentén vett komplex integrálra):

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}} \quad .$$

Eredeti	Transzformált	Megjegyzés
$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f_{\omega} e^{-i\omega t}$	$f_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}$	
$f(-t)$	$f_{-\omega}$	
$f^*(t)$	$f_{-\omega}^*$	
$f(t - t_0)$	$f_{\omega} e^{i\omega t_0}$	
$e^{i\omega_0 t} f(t)$	$f_{\omega + \omega_0}$	
$f(t/c)$	$ c f_{c\omega}$	$c \in \mathbb{R}$
$f^{(k)}(t)$	$(-i\omega)^k f_{\omega}$	$k \in \mathbb{N}$
$Q(\frac{d}{dt})f(t)$	$Q(-i\omega)f_{\omega}$	$Q(t)$ polinom
$t^k f(t)$	$(-i\frac{d}{d\omega})^k f_{\omega}$	$k \in \mathbb{N}$
$Q(t)f(t)$	$Q(-i\frac{d}{d\omega})f_{\omega}$	$Q(t)$ polinom
$h(t) = (f * g)(t)$	$h_{\omega} = f_{\omega} g_{\omega}$	$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t')g(t - t')$
$h(t) = f(t)g(t)$	$h_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} f_{\omega'} g_{\omega - \omega'}$	azaz $h_{\omega} = \frac{1}{2\pi} f_{\omega} * g_{\omega}$
1	$2\pi\delta(\omega)$	
$\delta(t)$	$\delta_{\omega} = 1$	
$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 0 \\ 1/2 & \text{ha } t = 0 \\ 1 & \text{ha } t > 0 \end{cases}$	$\Theta_{\omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{i}{\omega + i\epsilon} = \pi\delta(\omega) + i\mathcal{P}\frac{1}{\omega}$	Θ a Heaviside-féle lépcső-függvény, $\mathcal{P}$ a főérték
$\text{sgn}(t) = 2\Theta(t) - 1$	$\text{sgn}_{\omega} = 2i\mathcal{P}\frac{1}{\omega}$	$\mathcal{P}$ a főérték
$ t $	$2\frac{d}{d\omega}\mathcal{P}\frac{1}{\omega}$	$\neq -2/\omega^2$ (ami nem is disztribúció!)
$Q(t)$	$2\pi Q(-i\frac{d}{d\omega})\delta(\omega)$	$Q(t)$ polinom
$\mathcal{P}\frac{1}{t}$	$i\pi \text{sgn}(\omega)$	
$e^{-i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$\omega \in \mathbb{R}$
$\Theta(\pm t)e^{\mp\eta t}$	$\frac{\pm i}{\omega \pm i\eta} = \frac{\pm 1}{-i\omega \pm \eta}$	$\Re\eta > 0$
$\frac{1}{t \pm i\eta}$	$\mp 2\pi i e^{\pm\eta\omega}\Theta(\mp\omega)$	$\Re\eta > 0$
$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sqrt{2\pi\sigma^2}e^{-\omega^2\sigma^2/2}$	
$\frac{\sigma}{\sigma^2 + t^2}$	$\pi[\text{sgn}(\Re\sigma)\cosh(\sigma\omega) - \text{csgn}(\omega)\sinh(\sigma\omega)]$	valós σ -ra: $\pi \text{sgn}(\sigma)e^{- \sigma\omega }$
$e^{-\eta t }$	$\frac{2\eta}{\eta^2 + \omega^2}$	$\Re\eta > 0$

2. táblázat. Néhány Fourier-transzformált (t és ω folytonos).

Ha nem törődünk a táblázatban szereplő feltételekkel, csapdába eshetünk. Például $\Re\eta > 0$ esetén az $f(t) = \Theta(t)e^{\eta t}$ csak *formálisan* Fourier-transzformálható: $f_{\omega} \neq i/(\omega - i\eta)$, ugyanis ez utóbbinak az inverz transzformáltja $-\Theta(-t)e^{\eta t}$.