

Matematikai módszerek a fizikában

11. Feladatlap

11.1 feladat: Jelöljük $\mathbf{A}_4$ -el a negyedfokú permutációs csoport

$$\begin{array}{llll} e = (1)(2)(3)(4) & f_1 = (12)(34) & f_2 = (13)(24) & f_3 = (14)(23) \\ g_1 = (123) & g_2 = (132) & g_3 = (124) & g_4 = (142) \\ g_5 = (134) & g_6 = (143) & g_7 = (234) & g_8 = (243) \end{array}$$

elemekből álló részcsoporthat! Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbf{H} = \{e, f_1, f_2, f_3\}$ invariáns részcsoporthatja $\mathbf{A}_4$ -nek! Jelölje $\mathbf{H}_1$ ill. $\mathbf{H}_2$ a $\mathbf{H}$ által generált mellékosztályokat, és $\mathbf{C}_3 = \{e, C, C^2\}$ a harmadrendű ciklikus csoportot! Mutassuk meg, hogy az

$$f(h) = \begin{cases} I & \text{ha } h \in \mathbf{H} \\ C & \text{ha } h \in \mathbf{H}_1 \\ C^2 & \text{ha } h \in \mathbf{H}_2 \end{cases}$$

leképezés homomorfizmus! Mi a leképezés magja?

11.2 feladat: Rendeljük hozzá a C_5 forgatás és a σ_1 tükrözés által generált $\mathbf{C}_{5v} = \text{gp}\{C_5, \sigma_1\}$ csoport elemeihez a

$$C_5 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixokat, ill. a csoportszorzás alapján a megfelelő mátrixszorzatokat! Reprezentáció-e ez a leképezés? Irreducibilis-e? (Használjuk fel a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

segédmatrixot!)

11.3 feladat: Határozzuk meg azt az S matrìxot, amely az $\mathbf{SO}(2)$ csoport

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

2×2 -es reprezentációját az $SR(\varphi)S^{-1}$ kifejezéssel diagonális alakra transzformálja! Mutassuk meg, hogy az $SR(\varphi)$ reprezentáció a valós számok halmaza felett irreducibilis, a komplex számok halmaza felett ellenben reducibilis!

11.4 feladat: Mutassuk meg, hogy a

$$D(\varphi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2i\varphi} + 1 & i(e^{2i\varphi} - 1) \\ -i(e^{2i\varphi} - 1) & e^{2i\varphi} + 1 \end{pmatrix}$$

mátrixok az $\mathbf{SO}(2)$ csoport 2×2 -es reprezentációját alkotják! Irreducibilis-e ez az ábrázolás, ha nem, milyen reducibilis komponensekre bontható? Hű-e a $D(\varphi)$ reprezentáció?

11.5 feladat: Mi az infinitezimális generátora a 3-dimenziós tér (1,2,3) irányú tengelye körüli forgatásoknak? Írjuk fel a véges szögű elforgatások matrìxát exponenciális alakban!

11.6 feladat: Ismeretes, hogy a 3-dimenziós tér általános forgatásai megadhatók három, z tengely körüli λ szögű, y tengely körüli μ szögű, z tengely körüli ν szögű forgatás egymás utáni alkalmazásával (λ, μ, ν az ún. Euler-szögek):

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \nu & -\sin \nu & 0 \\ \sin \nu & \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \mu & 0 & \sin \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \mu & 0 & \cos \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ennek a forgatásnak az **SU(2)** csoportban a generátor elemekkel kifejezve a

$$D = \exp\left(\frac{i\nu}{2}\sigma_z\right) \exp\left(\frac{i\mu}{2}\sigma_y\right) \exp\left(\frac{i\lambda}{2}\sigma_z\right)$$

operáció felel meg, ahol

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Írjuk fel a 2×2 -es komplex D mátrixot! Milyen mátrix felel meg a 2π szögű elforgatásnak?