

Matematikai módszerek a fizikában

8. Feladatlap

8.1 feladat: Alkalmazva a Fourier-transzformációt az $x^n y(x) = 0$ disztribúció egyenletre ($n = 1, 2, \dots$) bizonyítsuk be, hogy az egyenlet általános megoldása

$$y = c_0 \delta(x) + c_1 \delta^{(1)}(x) + \dots + c_{n-1} \delta^{(n-1)}(x).$$

Használjuk ki, hogy az $y^{(m)} = 0$ egyenlet általános megoldása az $y = a_0 + a_1 x + \dots + a_{m-1} x^{m-1}$ disztribúció.

8.2 feladat: Határozzuk meg a

$$\Delta \Phi(r) = -4\pi \rho(r)$$

Poisson egyenlet Green-függvényét a $z > 0$ féltérben a

$$\Phi|_{z=0} = 0 \quad \text{és} \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

határfeltételekkel. (Alkalmazzuk a tükrözéses módszert!)

8.3 feladat: A kvantummechanikában a szabad részecskék mozgásegyenlete az ún. "hullám-függvényre" vonatkozó Schrödinger-egyenlet:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{2m} \Delta \Psi = 0. \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi = 0$$

(Az egyenletben fellépő $\hbar$ konstans értékét most egynek választottuk.) Határozzuk meg a szabad tömegpont retardált Green-függvényét, amely az

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \Delta \right) G(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r}) \delta(t) \quad \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) G(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r}) \delta(t)$$

egyenletet elégíti ki.

8.4 feladat: A változók szétválasztásának módszerével oldjuk meg az alábbi hővezetési típusú feladatokat:

$$(1) \quad u_t = 4u_{xx} + t + e^t, \quad u|_{t=0} = 2;$$

$$(2) \quad u_t = u_{xx} + e^t \cos x, \quad u|_{t=0} = \cos x.$$

Itt u_t és u_{xx} a keresett $u(x, t)$ függvény parciális deriváltjait jelentik:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

8.5 feladat: A változók szétválasztásának módszerével határozzuk meg azt a síkon értelmezett $u(r, \varphi)$ függvényt, amely harmonikus az egységsugarú kör belsejében (azaz $\Delta u = 0$) és a peremen kielégíti az $u|_{r=1} = f(\varphi)$ egyenletet, ahol

$$(1) \quad f(\varphi) = \cos^2 \varphi;$$

$$(2) \quad f(\varphi) = \sin^3 \varphi.$$