

Matematikai módszerek a fizikában

7. Feladatlap

7.1 feladat: Számítsuk ki a következő disztribúciók Fourier-transzformáltját!

(a) $\delta^{(k)}(x), \quad k = 1, 2, \dots$

(b) $\Theta(x - a)$

(c) $\text{sign}(x)$

(d) $x^k \delta(x), \quad k = 1, 2, \dots$

(e) $x^k \delta^{(m)}(x), \quad m \geq k$

7.2 feladat: Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

(a) $u' + 3u = e^{-2t}, \quad u(0) = 0$

(b) $u'' + 5u' + 6u = 12, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0.$

7.3 feladat: Bizonyítsuk be, hogy az alábbi esetekben a $G(x)$ függvény a D operátor alapmegoldása, azaz $DG(x) = \delta(x)$!

(a) $G(x) = \Theta(x)e^{\pm ax}, \quad D = \frac{d}{dx} \mp a$

(b) $G(x) = \Theta(x)(\frac{\sin ax}{a}), \quad D = \frac{d^2}{dx^2} + a^2$

(c) $G(x) = \Theta(x)(\frac{\sinh ax}{a}), \quad D = \frac{d^2}{dx^2} - a^2$

(a) $G(x) = \Theta(x)e^{\pm ax} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}, \quad D = (\frac{d}{dx} \mp a)^m, \quad m = 2, 3, \dots$

7.4 feladat: Egy tömegpont fékeződését bizonyos esetekben közelíthetjük az elmozdulás harmadik deriváltjával arányos erővel. A megfelelő mozgásegyenlet

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \tau \frac{d^3x}{dt^3} = \frac{F(t)}{m}, \quad (\tau > 0).$$

(Gyorsuló elektron sugárzás miatti energiavesztését vehetjük így közelítőleg figyelembe, ha a rendszer változására jellemző karakterisztikus időtartamok a $\tau = 2e^2/3mc^3$ értéknél lényegesen nagyobbak.) Ha feltételezzük, hogy a fenti egyenlet a teljes $t \in (-\infty, \infty)$ tartományban érvényes, kauzális-e a rendszer viselkedése? Hogyan mozog a $t < 0$ esetén álló részecske, ha a $t = 0$ időpontban tetszőlegesen kicsi $F(t) = \varepsilon \delta(t)$ erő éri?

7.5 feladat: A k paraméter milyen értékei esetén ír le kauzális rendszert az

$$y''(x) + ky'(x) = f(x)$$

differenciálegyenlet, ha $x < 0$ esetén $y(x) = 0$? Határozzuk meg a retardált ill. avanszált Green-függvényeket!