

Matematikai módszerek a fizikában

5. Feladatlap

6.1 feladat: Legyen $\mathbb{D}$ és $\mathbb{S}$ a disztribúciók elméletében használt két szokásos alaptér. Amennyiben $\varphi \in \mathbb{D}$, van-e az $\frac{1}{k}\varphi(x)$, $\frac{1}{k}\varphi(kx)$ és $\frac{1}{k}\varphi(\frac{x}{k})$ ($k = 1, 2, \dots$) függvénysorozatok között olyan, amely konvergens $\mathbb{D}$ -ben, és mi ezek határértéke? Konvergensek-e az előbbi sorozatok $\mathbb{S}$ -ben, ha $\varphi \in \mathbb{S}$?

6.2 feladat: Határozzuk meg a $\mathbb{P} \frac{\cos kx}{x}$ disztribúciósorozat határértékét $\mathbb{D}'$ -ben, ha $k \rightarrow \infty$! Itt $\mathbb{P}$ a főérték integrált jelenti:

$$\langle \varphi | \mathbb{P} \frac{\cos kx}{x} \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\cos kx}{x} \varphi(x) dx \quad \varphi \in \mathbb{D}.$$

6.3 feladat: Mutassuk meg, hogy $x^m \delta^{(m)}(x) = (-1)^m m! \delta(x)$, ill. $x^k \delta^{(m)}(x) = 0$ ($m = 0, 1, \dots, k-1$), ha az (m) index az m . deriváltat jelöli!

6.4 feladat: Számítsuk ki a következő deriváltakat:

- (1) $(\Theta(x)x^{m+k})^{(m)}, \quad m \geq 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$
- (2) $(\Theta(x)x^{m-k})^{(m)}, \quad m \geq 1, \quad k = 1, 1, 2, \dots, m$
- (3) $(\Theta(x)e^{ax})^{(m)}, \quad m \geq 1.$

6.5 feladat: Határozzuk meg az alábbi egyenletek egy-egy speciális megoldását:

- (1) $f'' + 2f' + f = 2\delta + \delta'$
- (2) $f'' + 4f = \delta$
- (3) $f'' - 4f = 2\delta + \delta'$

Keressük a megoldást $\Theta(x)z(x)$ alakban, ahol $z(x)$ egy ismeretlen, komplex értékű függvény!

6.6 feladat: Számítsuk ki a következő függvények Fourier-transzformáltját!

- (1) $\Theta(R_0 - |x|)$
- (2) $e^{-a^2 x^2}$
- (3) e^{ix^2}