

Matematikai módszerek a fizikában

5. Feladatlap

5.1 feladat: Számítsuk ki a következő függvény-disztribúció szorzatokat:

- (a) $(\cos x) \delta(x)$,
- (b) $e^{x+1} \delta(x)$,
- (c) $(\sin x^2) \delta(x)$,
- (d) $x \mathcal{P} \frac{1}{x}$,
- (e) $(\sin x) \delta(x - \pi)$,

ahol $\mathcal{P}$ a főérték disztribúciót jelöli. Az eredmények közül melyik reguláris és melyik szinguláris disztribúció?

5.2 feladat: Ábrázoljuk az $f(x) = x [\Theta(x) - \Theta(x - a)]$; ($a > 0$) függvényt és határozzuk meg az általánosított deriváltját, ha

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0; \\ 1, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

5.3 feladat: Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a $h = f * f * f$ konvolúció függvényt!

5.4 feladat: Ha a normális (Gauss) eloszlású x és y független fizikai mennyiségek sűrűség függvényei

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\alpha^2}} \quad \text{és} \quad g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta} e^{-\frac{(y-b)^2}{2\beta^2}},$$

mi lesz a $z = x + y$ mennyiség eloszlásának sűrűség függvénye?

5.5 feladat: A $\delta_a = \delta(x - a)$ és $\delta_b = \delta(x - b)$ jelöléseket felhasználva írjuk fel a

$$h = \underbrace{(\alpha\delta_a + \beta\delta_b) * (\alpha\delta_a + \beta\delta_b) * \dots * (\alpha\delta_a + \beta\delta_b)}_{n\text{-szer}}$$

disztribúciót.

5.6 feladat: Milyen d dimenziószám esetén határoz meg az $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-1}$ függvény reguláris disztribúciót, ha $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^d$? (Azaz, mikor lesz $f(\mathbf{x})$ lokálisan integrálható?) Legyen $d = 1, 2$ vagy 3 . $\mathcal{R}$ a valós számok halmazát jelenti.