

Matematikai módszerek a fizikában

3. Feladatlap

3.1 feladat: Adjuk meg az

$$S = 2\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + (3/2)\mathbf{i} \otimes \mathbf{j} + 2\mathbf{i} \otimes \mathbf{k} + (3/2)\mathbf{j} \otimes \mathbf{i} + 3\mathbf{j} \otimes \mathbf{j} + 3\mathbf{j} \otimes \mathbf{k} + 2\mathbf{k} \otimes \mathbf{i} + 3\mathbf{k} \otimes \mathbf{j} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$$

szimmetrikus tenzor S_{kl} , S^{kl} , ill. S^k_l , S_k^l mátrixait az alábbi bázisrendszerekben:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{i} & \mathbf{f}_1 &= -\mathbf{i} + \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{i} + \mathbf{j} & \mathbf{f}_2 &= \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} & \mathbf{f}_3 &= 2\mathbf{k} \end{aligned}$$

3.2 feladat: Adjuk meg az

$$A = -(1/2)(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j} - \mathbf{j} \otimes \mathbf{i}) + (\mathbf{j} \otimes \mathbf{k} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{j}) - (\mathbf{k} \otimes \mathbf{i} - \mathbf{i} \otimes \mathbf{k})$$

antiszimmetrikus tenzor A_{kl} , A^{kl} , ill. A^k_l , A_k^l mátrixait a 3.1 feladatnál megadott bázisrendszerekben.

3.3 feladat: Anizotróp testekben a Hooke-törvény alakja $\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u^{lm}$ ahol σ_{ik} a feszültségtenzor és u^{lm} a deformációtenzor. A λ_{iklm} negyedrendű rugalmassági modulus tenzora a következő szimmetria tulajdonságokkal rendelkezik:

$$\lambda_{iklm} = \lambda_{kil m} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}.$$

Hány komponense van a rugalmassági modulus tenzornak, mennyi ezek közül a független elem és melyek ezek?

3.4 feladat: Az elektromágneses tér térerősségtenzora a relativisztikus négyes formalizmusban kielégíti a harmadrendű

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0$$

tenzor egyenletet. Az itt szereplő mennyiségek a szokásos hármas komponensekkel kifejezve:

$x^i = (ct, x, y, z)$, valamint

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y/c & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z/c & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^i = (\phi/c, \mathbf{A})$$

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \dot{\mathbf{A}} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Írjuk át a fenti egyenletet hármas komponensekre!

3.5 feladat: Keresendők az alábbi térgörbék azon t_0 paraméterű pontja(i), ahol

(a) $\mathbf{r}(t) = (\sin t - t \cos t)\mathbf{i} + (\cos t + t \sin t)\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}$, az érintő párhuzamos az (y, z) síkkal;

(b) $\mathbf{r}(t) = (t^4/4)\mathbf{i} + (t^3/3)\mathbf{j} + (t^2/2)\mathbf{k}$, az érintő párhuzamos az $x+3y+2z=0$ síkkal.

3.6 feladat: Határozzuk meg az

$$\mathbf{r}(t) = t \cos(3 \ln t)\mathbf{i} + t \sin(3 \ln t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

egyenletű kúpos csavarvonalnak és az $x^2 + y^2 - z^2/4 = 0$ körkúp alkotóinak hajlásszögét.