

Matematikai módszerek a fizikában

2. Feladatlap

2.1 feladat: Legyen $\mathcal{C}$ a komplex számok halmaza.

- (a) A ξ skalár milyen választása esetén alkotnak bázist az $(1, 1, 1)$ és az $(1, \xi, \xi^2)$ vektorok a $\mathcal{C}^2$ térben?
- (b) Milyen ξ skalár esetén alkotnak bázist a $(0, 1, \xi)$, $(\xi, 0, 1)$, $(\xi, 1, 1 + \xi)$ vektorok a $\mathcal{C}^3$ térben?

2.2 feladat: Bizonyítsuk be, hogy a 3-dimenziós valós Euklideszi tér vektoraira definiált szokásos műveletekkel tetszőleges $\{\mathbf{e}_i\}$ bázisvektorokra fennáll az $\mathbf{e}^i \times \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ összefüggés!

2.3 feladat: Legyen $\mathbf{x} = (1, 2)$ és $\mathbf{y} = (1, 2, 3)$ az $\mathcal{R}^2$ ill. $\mathcal{R}^3$ egy-egy eleme. Határozzuk meg az $\mathcal{R}^2 \otimes \mathcal{R}^3$ -beli $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ vektor koordinátáit az $\{\Sigma_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j\}$ szorzatbázisra vonatkozóan, ahol

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (1, 0) & \mathbf{f}_1 &= (-1, 0, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, -1) & \mathbf{f}_2 &= (0, 2, 0) \\ & & \mathbf{f}_3 &= (0, 0, 1) .\end{aligned}$$

2.4 feladat: Jelölje a legfeljebb n -ed fokú polinomok lineáris terét $\mathcal{P}_n$! A $p(t) \in \mathcal{P}_1$ és a $q(u) \in \mathcal{P}_2$ polinom-terek tenzoriális szorzata által definiált lineáris tér a $Q(t, u) \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ kétváltozós polinomok halmaza. Határozzuk meg a $Q(t, u) = tu^2 - 2t + 2u$ elem koordinátáit a szorzatbázisban, ha

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_0 &= 1 & \mathbf{f}_0 &= 1 \\ \mathbf{e}_1 &= 1 + t & \mathbf{f}_1 &= 1 + u \\ & & \mathbf{f}_2 &= 1 + u + u^2 .\end{aligned}$$

2.5 feladat: Határozzuk meg a

$$\mathbf{T} = 2\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + \mathbf{i} \otimes \mathbf{j} + \mathbf{i} \otimes \mathbf{k} + 2\mathbf{j} \otimes \mathbf{i} + 3\mathbf{j} \otimes \mathbf{j} + 4\mathbf{j} \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{i} + 2\mathbf{k} \otimes \mathbf{j} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$$

tenzor T_{ik} , ill. T_k^i komponenseit, valamint az $U = T_k^k$ mennyiséget mind az $\{\mathbf{e}_i\}$, mind az $\{\mathbf{f}_j\}$ bázisrendszerekben:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \mathbf{i} & \mathbf{f}_1 &= -\mathbf{i} + \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{i} + \mathbf{j} & \mathbf{f}_2 &= \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} & \mathbf{f}_3 &= 2\mathbf{k} .\end{aligned}$$

2.6 feladat: Az elektromágneses tér térerősségtenzora a g_{ij} alaplátrixú négyes formalizmusban (megfelelő egységekben)

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} .$$

Határozzuk meg az F^{ik} , ill. F_k^i tenzorok mátrixát. A hatásfüggvény sűrűsége az $F_{ik}F^{ik}$ skalárral arányos. Adjuk meg ezt a mennyiséget a szokásos hármas komponensekkel!