

Matematikai módszerek a fizikában

1. Feladatlap

1.1 feladat: A szoros illeszkedésű hatszöges kristályszerkezetek (pl. berillium, cink stb.) elemi celláját kifestítő bázisvektorok (megfelelő egységekben)

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \mathbf{i} \\ \mathbf{e}_2 &= -(1/2)\mathbf{i} + (\sqrt{3}/2)\mathbf{j} \\ \mathbf{e}_3 &= c \mathbf{k},\end{aligned}$$

ahol c az anyagra jellemző szám. Határozzuk meg a duális térben (reciprok rács térben) az $\{\mathbf{e}_i\}$ bázis duálisát!

1.2 feladat: Az $x \in (-\infty, +\infty)$ intervallumon értelmezett legfeljebb harmadfokú polinomok lineáris teret alkotnak, amelynek triviális bázisa az

$$\mathbf{e}_0 = 1, \quad \mathbf{e}_1 = x, \quad \mathbf{e}_2 = x^2, \quad \mathbf{e}_3 = x^3.$$

Definiáljuk a $\mathbf{p} = p(x)$ és $\mathbf{q} = q(x)$ polinomok skaláris szorzatát a

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)q(x)e^{-x^2} dx$$

kifejezéssel! Határozzuk meg a g_{ij} alaplátrixot és a duális bázis elemeit! (Használjuk fel, hogy $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.)

1.3 feladat: A 3-dimenziós Euklideszi térben (a szokásos skalárszorzzattal) adott az $\{\mathbf{e}_i\}$ és $\{\mathbf{f}_j\}$ bázisrendszer:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \mathbf{i} & \mathbf{f}_1 &= -\mathbf{i} + \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{i} + \mathbf{j} & \mathbf{f}_2 &= \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} & \mathbf{f}_3 &= 2\mathbf{k}\end{aligned}$$

Határozzuk meg a $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektor kovariáns, ill. kontravariáns komponenseit mind az $\{\mathbf{e}_i\}$, mind az $\{\mathbf{f}_j\}$ bázisban!

1.4 feladat: A valós számhármassok terében definiáljuk a skalárszorzzatot a $g_{ij} = \delta_{ij}$ alaplátrix segítségével! Határozzuk meg az

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (-1, 1, 0) \\ \mathbf{e}_3 &= (-1, -1, -1)\end{aligned}$$

bázisvektorok alapján a Schmidt-féle eljárással kapható ortonormált $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ bázisrendszert és az $\{\mathbf{e}_i\}$ rendszert $\{\mathbf{f}_j\}$ -be transzformáló mátrixot!

1.5 feladat: A 3-dimenziós Euklideszi tér $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ egységvektoraival és a szokásos skalárszorzzással definiáljuk az

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{i} + \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{i}\end{aligned}$$

bázisvektorokat. Határozzuk meg a Schmidt-féle eljárással kapható ortonormált $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ bázisrendszert és az $\{\mathbf{e}_i\}$ rendszert $\{\mathbf{f}_j\}$ -be transzformáló mátrixot!