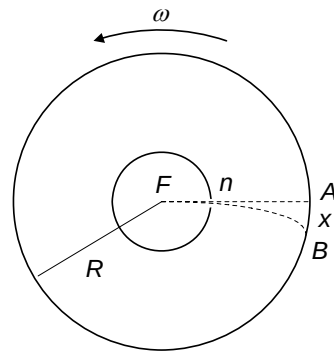


### 4.1 Kinetikus gázelmélet, transzportfolyamatok

- 1.) Fejezze ki az egyatomos ideális gáz nyomását a gáz  $U$  belső energiájával és  $V$  térfogatával! ( $p = \frac{2U}{3V}$ )

- 2.) Stern híres kísérletében, amellyel a Maxwell-eloszlás kísérleti igazolását adta, 1880 K-es ezüstszárlól távozó atomok sebességeloszlását mérte meg, az ábrán vázolt elrendezéssel. Az  $F$  pontbeli tengelyben elhelyezkedő szárlól távozó ezüst atomok az  $n$  nyíláson át jutottak az  $R$  sugarú hengerfelületre. A berendezés  $\omega$  szögsebességgel forgott, aminek következtében a  $v$  sebességű atom az  $A$  pont helyett a  $B$ -ben csapódott le. (a) Állapítsuk meg az  $AB$  ív  $x$  hosszát 800 m/s sebességű atomok esetén, ha a fordulatszám  $50 \text{ s}^{-1}$  és  $R=20 \text{ cm}$ ! (b) Milyen sebességnél adják a legnagyobb rétegvastagságot a külső



hengerfelületen lecsapódó ezüst atomok? ((a)  $x = \frac{\omega R^2}{v}$ , (b)  $v_m = 5v_0/2$ , ahol  $v_0$  a legvalószínűbb sebesség. *Útmutatás:* az időegység alatt lecsapódó részecskék számát a Maxwell-eloszlás alapján határozzuk meg, és használjuk ki az  $x \sim 1/v$  összefüggést.)

- 3.) Az  $F(v)$  sebességeloszlási függvényből a  $w = mv^2/2$  összefüggés felhasználásával vezessük le az  $f(w)$  energia-eloszlási függvényt, ahol  $f(w)$  azt mutatja meg, hogy az összes molekula hányadrésze rendelkezik  $w$  és  $w+dw$  közötti mozgási energiával! Mekkora a legvalószínűbb  $w_0$  energia és mennyi az átlagos kinetikus energia?
- 4.) Legfeljebb mekkora lehet az 1 liter térfogatú, gömb alakú edényben lévő 300 K-es hidrogéngáz nyomása, hogy az átlagos szabad úthossz nagyobb legyen az edény átmérőjénél? A hidrogénmolekula átmérője  $2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ . ( $p < 0,155 \text{ Pa}$ )
- 5.) Hogyan változik az ideális gáz  $D$  diffúziós állandója és  $\eta$  belső súrlódási együtthatója, ha a gáz térfogata  $n$ -szeresére nő (a) állandó hőmérsékleten, (b) állandó nyomáson? ((a)  $D$ :  $n$ -szeres,  $\eta$ : változatlan, (b)  $D$ :  $n^{3/2}$ -szeres,  $\eta$ :  $n^{1/2}$ -szeres)
- 6.)  $V$  térfogatú, vékonyfalú tartályban ideális gáz van, az edényt légüres tér veszi körül. (a) Hogyan változik az idő függvényében az edényben lévő gáz  $n$  részecskeszám-sűrűsége, ha a tartály falán igen kicsi,  $A$  területű lyuk van? (b) Határozzuk meg azt az időtartamot, amely alatt a gáz nyomása a felére csökken! Feltesszük, hogy a gáz kiáramlása lassú, így a gáz egyensúlyi állapotát a folyamat nem zavarja, továbbá a lyuk mérete sokkal kisebb, mint a szabad úthossz, tehát a lyuk területére is érvényes az az összefüggés, hogy az edény falának időegység alatt nekiütköző molekulák száma:  $\frac{1}{4} n A \bar{v}$  ( $\bar{v}$  a molekulák átlagsebessége). A hőmérséklet mindvégig  $T$ . ((a)  $n(t) = n_0 \exp\{-t/\tau\}$ , ahol  $n_0$  a kezdeti részecskeszám-sűrűség,  $\tau = 4V/(A\bar{v})$ , (b)  $t_{1/2} = \tau \ln 2$ )
- 7.) Két azonos térfogatú tartály kapcsolódik egymáshoz, a szabad úthosszhoz képest kisméretű nyíláson keresztül. Az egyikben  $p_K$  nyomású hidrogéngáz, a másikban kétszer akkora nyomású oxigéngáz van. A gázok  $T$  hőmérséklete azonos és időben

állandó. A kinetikus gázelmélet segítségével mutassuk ki, hogy a két tartályban azonos  $p = 3p_K / 2$  egyensúlyi nyomás alakul ki! (Útmutatás: Használjuk ki, hogy egyensúlyban az egyes edényekben a molekulák térfogati sűrűsége állandó, és az összes molekulák száma a folyamatban nem változik!)

- 8.) Egy  $d$  vastagságú, nagy felületű, homogén anyagréteg két ellentétes felületén a hőmérséklet állandó  $T_1$  és  $T_2$ , az anyag hővezetési tényezője hőmérséklet- és helyfüggetlen. A hővezetés alapegyenlete segítségével mutassuk ki, hogy a rétegben a hőmérséklet lineárisan változik az egyik felülettől mért távolsággal ( $x$ ), és írjuk fel a  $T(x)$  függvényt a megadott mennyiségekkel! ( $T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{d} x$ )

- 9.) Mennyi idő alatt képződik  $y = 5 \text{ cm}$  vastag jégréteg egy tó felszínén, ha a léghőmérséklet  $T_\ell = -10^\circ \text{C}$ , a víz hőmérséklete a jégréteg alatt  $T_0 = 0^\circ \text{C}$ . Tegyük fel, hogy a jégréteg felső felülete mindig azonos hőmérsékletű a levegővel, alsó felülete pedig mindig  $0^\circ \text{C}$ -os. A jég olvadáshője  $L_o = 335 \text{ J/g}$ , a jég hővezetési tényezője  $\lambda = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ J/(s} \cdot \text{cm} \cdot ^\circ \text{C)}$ , a jég sűrűsége  $\rho = 0,92 \text{ g/cm}^3$ . (a vastagság

időfüggése:  $y(t) = \left( \frac{2\lambda(T_0 - T_\ell)}{\rho L_o} \right)^{1/2} t^{1/2}$ , 5 óra alatt. Útmutatás: írjuk fel egy elemi

időtartam alatt keletkező elemi vastagságú jégréteg képződésekor felszabaduló hőt, és tegyük fel, hogy ez a jégrétegen keresztül hővezetéssel távozik, majd integráljuk a kapott egyenletet)

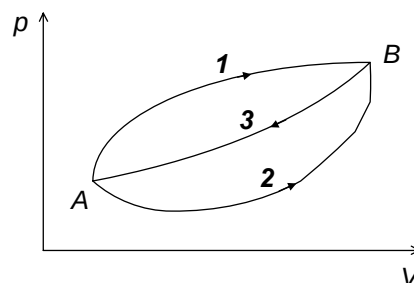
- 10.)  $T_0$  hőmérsékletű, igen nagy hőkapacitású folyadékba  $T_1 > T_0$  hőmérsékletű,  $m$  tömegű és  $c$  fajhőjű, abszolút jó hővezető testet helyezünk a  $t=0$  pillanatban. A test lehűlése a Newton-féle lehűlési törvény szerint zajlik ( $\text{hőáramsűrűség} = \alpha(T - T_0)$ ), az  $\alpha$  hőátadási tényező ismert, a test felületének nagysága  $A$ . Határozzuk meg a test hőmérsékletét  $t$  idő eltelte után! ( $T = T_0 + (T_1 - T_0) \exp\left\{-\frac{\alpha A}{mc} t\right\}$ , Útmutatás: a leadott

hőt fejezzük ki egyrészt a hőkapacitással és a hőmérsékletváltozással, másrészt a folyadékba történő hőátadással, és integráljuk a kapott egyenletet.)

## 4.2 Állapotváltozás, I. főtétele

- 1.) Készítsen vázlatos ábrát ideális gáz (a) izochor, (b) izobár (c) izoterm és (d) adiabatikus állapotváltozásáról  $p$ - $V$ ,  $T$ - $V$ , és  $T$ - $p$  koordináta-rendszerekben úgy, hogy a kiindulási állapot minden esetben ugyanaz legyen!
- 2.) Ábrázolja vázlatosan ideális gáz (a) izochor, (b) izobár (c) izoterm és (d) adiabatikus állapotváltozásánál a belső energiának a hőmérséklettől-, térfogattól- és a nyomástól való függését! Legyen a belső energia az ordináta, és minden folyamatnál legyen ugyanaz a kiindulási állapot!
- 3.) Állapítsuk meg, milyen összefüggés van egy ideális gáz által állandó nyomáson végzett  $\Delta W$  munka, a gázzal közölt  $\Delta Q$  hőmennyiség és a  $\Delta U$  belső energia-változás között, ha a  $\gamma$  fajhőviszony ismert! ( $\Delta Q = \frac{\gamma}{\gamma-1} \Delta W = \gamma \Delta U$ )

- 4.) Ha egy rendszert az ábrán látható **1** úton viszünk az  $A$  állapotból a  $B$  állapotba,  $100\text{ J}$  hőt vesz fel, miközben  $30\text{ J}$  munkát végez. (a) Mennyi hőt vesz fel a rendszer az  $A$  és  $B$  állapotok közt a **2** úton, ha közben  $10\text{ J}$  munkát végez? (b) Ha  $20\text{ J}$  munkával vihetjük a rendszert  $B$ -ből  $A$ -ba a **3** út mentén, mennyi a közben leadott hő? ((a)  $80\text{ J}$ , (b)  $90\text{ J}$ )



- 5.) Mutassa meg, hogy ideális gáz izoterm összenyomásánál a kompresszibilitás  $\kappa_T = \frac{1}{p}$ , míg adiabatikus összenyomásnál

$\kappa_{ad} = \frac{1}{\gamma p}$ , ahol  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ ! (Útmutatás: használjuk a kompresszibilitás definícióját, és a megfelelő folyamatokat leíró egyenleteket.)

- 6.) A  $p=p(T,V)$  állapotegyenlet ismeretében fejezzük ki a  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$  mennyiséget a  $\beta_p$  hőtágulási együttható és a  $\kappa_T$  izotermikus kompresszibilitás segítségével!

$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\beta_p}{\kappa_T}$ . Útmutatás: használjuk fel a két mennyiség definícióját és azt, hogy állandó nyomáson a  $dp$  teljes differenciál nulla.)

- 7.) Egy  $V$  térfogatú szobában befűtünk. A szobában a hőmérséklet eközben állandó légköri nyomáson  $T_1$ -ről  $T_2$ -re nő. Mennyivel változik a szobában lévő levegő belső energiája? (nem változik)
- 8.) Egy kezdetben  $V_1$  térfogatú,  $\gamma$  fajhőviszonyú ideális gáz térfogatát  $V_2$ -re növeljük. A folyamatot egyszer adiabatikusan, másodszor pedig izotermikusan hajtjuk végre. Az első és második végállapotban a nyomások aránya 2. Mekkora a  $V_2$  térfogat?

$$(V_2 = V_1 2^{\frac{1}{\gamma-1}})$$

- 9.) Van der Waals-gáz belső energiájának térfogatfüggése az alábbi összefüggéssel adható meg:

$$U = c_V m T - \frac{m^2}{M^2} \frac{a}{V},$$

ahol  $m$  a gáz tömege,  $M$  a móltömeg,  $c_V$  az állandó térfogaton mért fajhő,  $a$  állandó. Egy hőszigetelt tartályt rögzített, jó hővezető anyagból készített fal választ két részre, amelyekbe azonos tömegű Van der Waals-gázt vezetünk be. A kezdeti állapotjellemzők:  $V_1$ ,  $T_1$ , illetve  $V_2$ ,  $T_2$ . (a) Mennyi lesz a végső egyensúlyi hőmérséklet? (b) Hogyan módosul a válasz, ha a gáz betöltése után az elválasztó falat rögtön kivesszük? (a)  $T = (T_1 + T_2) / 2$ , (b)  $T = (T_1 + T_2) / 2 - \frac{ma(V_1 - V_2)^2}{2M^2 c_V V_1 V_2 (V_1 + V_2)}$ .

*Útmutatás:* alkalmazzuk az I. főtétele. A gáz fajhőjét tekintsük állandónak.)

- 10.) Kondenzált (folyadék vagy szilárd) anyagok egyik közelítő állapotegyenlete  $V = V_0(1 - ap + bT)$ .

Mi az  $a$  és  $b$  paraméterek jelentése? (a  $V_0$  térfogatnál érvényes izotermikus kompresszibilitás és hőtágulási együttható)

- 11.) Szilárd testek hőtágulási együtthatója illetve izotermikus kompresszibilitása alacsony hőmérsékleten az alábbi összefüggésekkel adható meg:

$$\beta_p = \frac{3aT^3}{V}, \quad \kappa_T = \frac{b}{V}$$

( $a$  és  $b$  állandók). Határozzuk meg a szilárd test ilyenkor érvényes állapotegyenletét!

( $p = \frac{3a}{4b} T^4 + \frac{V_0 - V}{b}$ ,  $V_0$  állandó. *Útmutatás:* integráljuk a fenti mennyiségek definíciós egyenletét!)

- 12.) Fejezzük ki a  $C_p - C_V$  különbséget  $n$  mol van der Waals-gáz esetén a hőmérséklet, a

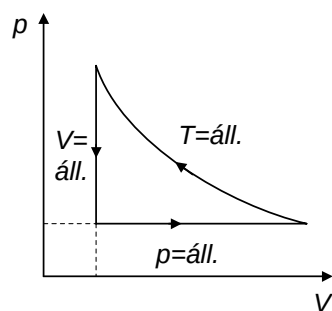
térfogat és a  $\beta_p$  hőtágulási együttható segítségével! ( $C_p - C_V = \frac{RT\beta_p}{1 - nb/V}$ ).

*Útmutatás:* használjuk fel az általános  $C_p - C_V = \frac{1}{n} \left[ p + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$  egyenletet, a

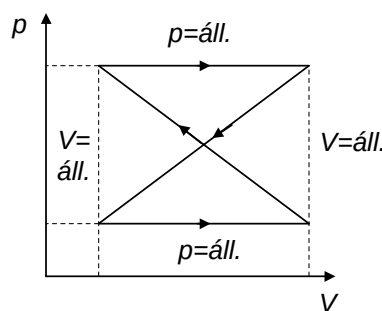
van der Waals-gáz belső energiájára vonatkozó összefüggést és a hőtágulási együttható definícióját.)

### 4.3 Fajhő, körfolyamatok

- Melegszik vagy lehül az  $1 \text{ mol}$  ideális gáz, ha a  $V = k / \sqrt{p}$  összefüggés ( $k$  állandó) szerint tágul ki? Mekkora a gáz mólhője ebben a folyamatban, ha állandó térfogaton mért mólhője  $C_V$ ? (lehül;  $C = C_V - R$ . *Útmutatás:* A fajhő általános definícióját használjuk, majd az állapotegyenlet és az állapotváltozás „pályáját” megadó egyenlet segítségével keressük meg a  $V=V(T)$  függvényt, és abból a  $dV/dT$  hányadost!)
- Határozzuk meg azon lehetséges folyamatokat megadó összefüggést, amelyek közben az ideális gáz mólhője állandó (az állandó nyomáson és állandó térfogaton mért mólhőket tekintjük ismertnek)! Vezessük le a kapott egyenletből az ismert, állandó mólhőjű speciális folyamatok egyenletét. ( $pV^{\frac{C-C_p}{C-C_V}} = \text{állandó}$ . *Útmutatás:* az első főtételbe írjuk be az állandónak feltételezett mólhőt, az állapotegyenlet segítségével kiszöböljük ki az egyenletből a hőmérsékletet, majd oldjuk meg a  $p$  és  $V$ -re kapott differenciálegyenletet.)
- Ideális gáz állapotváltozását a  $p$ - $V$  síkon a  $p=f(V)$  összefüggés írja le. (a) Bizonyítsa be, hogy ebben a folyamatban a fajhő térfogatfüggését a  $C(V) = C_V + R \frac{f(V)}{f(V) + V \frac{df}{dV}}$  összefüggés adja meg! (b) Milyen  $p_m, V_m$  értékpárnál maximális a gáz hőmérséklete, ha az állapotváltozást a  $p=a-bV$  egyenlet adja meg ( $a$  és  $b$  ismert, pozitív állandók)? ((a) *Útmutatás:* a fajhő definíciós egyenletébe írjuk be a megadott függvényt, használjuk az állapotegyenletet, és alkalmazzuk a  $\frac{dV}{dT} = \left( \frac{dT}{dV} \right)^{-1}$  összefüggést! (b)  $V_m = a/(2b)$ ,  $p_m = a/2$ . *Útmutatás:* használjuk ki, hogy a maximális hőmérsékletnek megfelelő izoterma az állapotváltozást leíró görbe érintője, ahol a fajhőnek szingularitása van!)
- Az a) ábrán egy ideális gázzal végzett körfolyamat  $p$ - $V$  diagramja látható. Ábrázoljuk a körfolyamatot (a)  $p$ - $T$  diagramon, (b)  $T$ - $V$  diagramon!



a

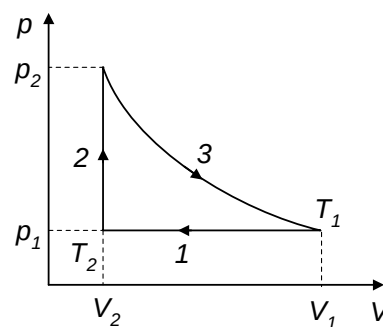


b

- A b) ábrán egy ideális gázzal végzett körfolyamat látható. Mekkora a gáz által végzett munka? ( $W=0$ )
- $n \text{ mol}$ ,  $p_1$  nyomású kétatomos ideális gázt  $V_1$  térfogatról állandó nyomáson  $V_2$  térfogatra nyomunk össze (az alábbi ábrán: 1-es út). Ezután állandó térfogaton az

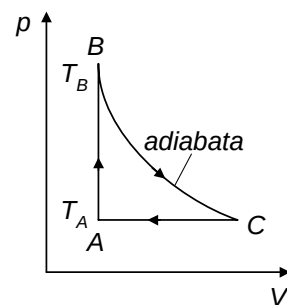
eredeti hőmérsékletére melegítjük (2 út), majd izotermikusan a kiinduló térfogatra tágítjuk (3 út). (a) Mennyivel változott a gáz belső energiája az 1-es úton? (b) Mennyi hőt kellett közölnünk a gázzal a 2-es úton? (c) Mekkora a gáz által végzett munka és a gáz által felvett hő a teljes körfolyamatban? ((a)  $\Delta U_1 = p_1 \frac{V_2 - V_1}{\gamma - 1}$ ,  $\gamma = 7/5$ , (b)  $\Delta Q_2 = -\Delta U_1$ , (c)

$$\Delta W = \Delta Q = p_1(V_2 - V_1) + p_1 V_1 \ln(V_1 / V_2))$$



- 7.) Egy Carnot-hűtőgép egyik hőtartályában  $100^\circ\text{C}$  hőmérsékletű, forrásban lévő víz, a másikban  $0^\circ\text{C}$  hőmérsékletű víz van. (a) Mennyi vizet kell az alsó hőtartályban  $0^\circ\text{C}$  hőmérsékletű jéggé fagyasztani ahhoz, hogy a felső hőtartályban  $m_g = 1\text{ kg}$   $100^\circ\text{C}$  hőmérsékletű gőz keletkezzék? (b) Mennyi külső munkát kell a körfolyamatba betáplálni? A víz forráshője  $L_f = 2,25 \cdot 10^6\text{ J/kg}$ , a jég olvadáshője  $L_o = 3,33 \cdot 10^5\text{ J/kg}$ . ((a)  $m_j = (1 - \eta)L_f m_g / L_o$ ,  $\eta$  a körfolyamat hatásfoka, (b)  $W = \eta L_f$ )

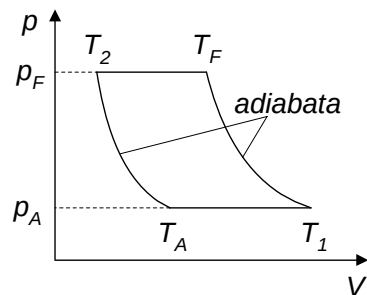
- 8.) Az ábrán a  $T_B$  és  $T_A$  hőmérsékletekkel meghatározott körfolyamat látható. Mekkora annak a gépnek a hatásfoka, amelyik ezt a körfolyamatot mólnyi mennyiségű, adott  $\gamma$  fajhőviszonyú ideális gázzal valósítja meg? ( $\eta = 1 - \gamma \frac{x^{1/\gamma} - 1}{x - 1}$ , ahol  $x = T_B / T_A$ )



- 9.)  $n$  mólnyi ideális gáz az ábrán látható körfolyamatot végzi. A körfolyamat két izobár és két adiabata szakaszból áll, amelyeket a  $p_A$ ,  $p_F$ ,  $T_A$ ,  $T_F$  adatok határoznak meg (ez a gőzgép sémája). (a) Mekkora a körfolyamat hatásfoka? (b) Hogyan függ a hatásfok attól, hogy hány atomos gázmolekulákkal végezzük a folyamatot? (c) Adott gépnél és adott gáznál hogyan növelhető a hatásfok?

$$((a) \eta = 1 - \left(\frac{p_A}{p_F}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, (b) \text{ a molekulák szabadsági}$$

fokának csökkentésével a hatásfok nő, (c) a nyomásviszony növelésével.)



- 10.) Egy épület fűtésére az ún. dinamikus fűtést használjuk: 1. A fűtőanyagot elégetjük egy hőerőgép tűzszekrényében, amelynek hőmérsékletét állandó  $T_1$  értéken tartjuk (ez a hőerőgép felső hőtartálya). Az épület fűtésére a hőerőgép  $T$  hőmérsékletű hűtővizét használjuk (ez a hőerőgép alsó hőtartálya). 2. A hőerőgép egy hőszivattyút működtet, amelynek alsó hőtartálya egy tó  $T_2$  hőmérsékletű vize, felső hőtartálya pedig a hőerőgépet hűtő  $T$  hőmérsékletű víz, amely egyúttal az épületet fűti ( $T_1 > T > T_2$ ). A tűzszekrényben  $q$  égéshőjű anyag ég, a hőerőgép és a hőszivattyú veszteség nélkül, Carnot-hatásfokkal működik. Határozzuk meg, mennyi hőt kap a fűtendő helyiség egységnyi tömegű fűtőanyag elégetése árán! ( $Q = q \frac{1 - T_2 / T_1}{1 - T_2 / T} > q$ )

#### 4.4 Entrópia, II. főtétel

- 1.)  $p_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$  nyomású,  $T = 27^\circ \text{C}$  hőmérsékletű és  $V_1 = 1 \text{ l}$  térfogatú ideális gáz izotermikusan  $p_2 = 10^5 \text{ Pa}$  nyomásig terjed ki. Mennyivel változott meg eközben az entrópiája? ( $\Delta S = \frac{p_1 V_1}{T} \ln \frac{p_1}{p_2}$ . *Útmutatás:* használjuk az entrópiaváltozás definícióját és az állapotegyenletet!)
- 2.) Mennyivel változik meg  $m = 1 \text{ g}$  nitrogéngáz entrópiája, ha állandó nyomáson  $V_1 = 1 \text{ l}$  térfogatról  $V_2 = 5 \text{ l}$  térfogatra expandáltatjuk. ( $\Delta S = \frac{m}{M} C_p \ln \frac{V_2}{V_1}$ ,  $C_p = 7R/2$ )
- 3.) (a) Vezesse le az entrópia hőmérséklet- és térfogatfüggését megadó összefüggést  $m$  tömegű,  $M$  móltömegű,  $\gamma$  fajhőviszonyú ideális gázra! (b) A kapott entrópia-kifejezés segítségével vezesse le az adiabata egyenletét!  

$$((a) S = \frac{m}{M} R \ln \left( T^{\frac{1}{\gamma-1}} V \right) + S_0), \text{ Útmutatás: használjuk az entrópiaváltozás definícióját és az állapotegyenletet! (b) } TV^{\gamma-1} = \text{állandó. Útmutatás: vizsgálja az entrópia-változást adiabatikus folyamatban!})$$
- 4.) Az ideális gáz entrópiáját gyakran az  $S(T, V) = nC_V \ln T + nR \ln V + S_0$  alakban használják. (a) Indokolja meg, hogy az  $S_0$  mennyiségnek függnie kell a rendszer anyagmennyiségét megadó  $n$  mólszámtól! (b) Adjon meg egy olyan  $S_0(n)$  függést, amellyel az entrópia fenti kifejezése teljesíti az (a) pontban szereplő követelményt! ((a) az entrópia extenzív állapotjellemző, (b)  $S_0 = -nR \ln n + ns_0$ , amivel az entrópia:  $S(T, V, n) = nC_V \ln T + nR \ln \frac{V}{n} + ns_0$ , ahol  $s_0$  már  $n$ -től független.)
- 5.)  $1 \text{ g } 0^\circ \text{C}$ -os víz állandó nyomáson  $100^\circ \text{C}$ -os gőzzé alakul. Határozzuk meg a folyamat alatt bekövetkező entrópiaváltozást ( $\Delta S = mc \ln \frac{373}{273} + \frac{mq}{373}$ ,  $c$  a víz fajhője,  $q$  a forráshője)
- 6.)  $1 \text{ kg}$  tömegű,  $273 \text{ K}$  hőmérsékletű vizet termikus kapcsolatba hozunk egy  $373 \text{ K}$  hőmérsékletű hőtartállyal. (a) Mekkora a víz entrópia-változása, miután a hőmérséklete elérte a hőtartály hőmérsékletét? (b) Mekkora eközben a hőtartály entrópia-változása? (c) Mekkora a teljes rendszerben (hőtartály és víz) létrejött entrópia-változás? (d) Mennyi a teljes rendszerben létrejött entrópia-változás, ha a testet először egy  $323 \text{ K}$  hőmérsékletű hőtartállyal, majd az egyensúly beállta után a  $373 \text{ K}$  hőmérsékletű hőtartállyal hozzuk kapcsolatba? (e) Lehet-e úgy melegíteni a vizet, hogy a teljes rendszer entrópia-változása kisebb legyen egy előírt értéknél (vagyis a folyamat előírt mértékben megközelítse a reverzibilis folyamatot)? ((a)  $1304 \text{ J/K}$ , (b)  $-1120 \text{ J/K}$ , (c)  $184 \text{ J/K}$ , (d)  $96 \text{ J/K}$ , (e) igen)
- 7.) (a) Ábrázoljuk a Carnot-körfolyamatot  $T$ - $S$  diagramban! (b) Mutassuk ki, hogy a körfolyamatban a gáz által végzett munka most is a körfolyamat területével egyenlő! (c) Számítsuk ki a fentiek alapján a Carnot-körfolyamat hatásfokát!

- 8.) Egymástól válaszfallal elzárt,  $V_1$  és  $V_2$  térfogatú két edényben azonos hőmérsékletű, azonos nyomású,  $n_1$  és  $n_2$  molszámú, *különböző fajtájú* ideális gáz van. Ha a válaszfalat eltávolítjuk, akkor a két gáz összekeveredik. (a) Indokoljuk meg, hogy a folyamatban miért nem változik a hőmérséklet és a nyomás! (b) Határozzuk meg az entrópia-változást (az ún. keverési entrópiát), és fejezzük ki a gázok  $n_1$  és  $n_2$  molszámaival! (c) Számítsuk ki az entrópia-változást, ha a két edényben *azonos* gáz van!

((a) ideális gázokról van szó, és érvényes a Dalton-törvény, (b)

$$\Delta S = Rn_1 \ln\left(\frac{n_1+n_2}{n_1}\right) + Rn_2 \ln\left(\frac{n_1+n_2}{n_2}\right). \text{ Útmutatás: alkalmazzuk a 4.) feladatban}$$

kapott entrópia-kifejezést, tegyük fel, hogy a teljes edényt kitöltő két gáz mindegyikének entrópiája úgy számítható, mintha a másik nem lenne jelen, és használjuk fel a Dalton törvényt, (c)  $\Delta S=0$ . Útmutatás: a levezetésnél vegyük figyelembe, hogy a keverés utáni állapotban az egész edényben *ugyanaz* a gáz van. A különböző gázokra levezetett fenti összefüggésből nem kapunk helyes eredményt; ez a Gibbs-féle paradoxon.)

- 9.) 0,2 kg, 100 °C hőmérsékletű vasat hőszigetelt kaloriméterben lévő, 0,5 kg, 12 °C -os vízbe teszünk. Mennyi az entrópia-változás a hőmérséklet kiegyenlítődése miatt (a nyomás állandó)? A vas fajhője  $c_1 = 0,46 \cdot 10^3 \text{ J/(kgK)}$ , a vízé  $c_2 = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J/(kgK)}$ . ( $T_k = 289 \text{ K}$ ,  $\Delta S = 18,1 \text{ J/K}$ )

- 10.) Két test azonos  $C=100 \text{ J/K}$  hőkapacitású, de hőmérsékletük különböző:  $T_1=273 \text{ K}$ ,  $T_2=373 \text{ K}$ . (a) mennyi lesz a közös hőmérsékletük, ha termikus kapcsolatba hozzuk őket úgy, hogy a környezet felé ne legyen hőátadás? (b) Mennyi lesz a közös hőmérséklet, ha a kiegyenlítődést egy reverzibilisen működő hőerőgép végzi? (c) Ha a kiegyenlítődés nem jár térfogatváltozással, mekkora lesz a két esetben a belső energia megváltozása és az entrópia-változás? ((a)  $T_k = (T_1 + T_2) / 2$ , (b)  $T_k = \sqrt{T_1 T_2}$ ,

$$(c) \Delta U_a = 0; \quad \Delta U_b = 2C\sqrt{T_1 T_2} - CT_1 - CT_2,$$

$$\Delta S_a = 2C \ln \frac{T_1 + T_2}{2} - C \ln T_1 - C \ln T_2; \quad \Delta S_b = 0)$$



### 4.5 Homogén rendszerek

- 1.) Bizonyítsuk be a  $\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p$ ,  $\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S$ ,  $\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V$  és  $\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S$  összefüggéseket!
- 2.) Bizonyítsuk be a  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$  Maxwell-összefüggést!
- 3.) Állandó anyagmennyiségű homogén rendszerben termikus és mechanikai kölcsönhatás esetén fennáll a  $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$  egyenlet. A fenti egyenlet levezetésének mintájára bizonyítsuk be, hogy ha a termikus kölcsönhatás mellett tetszőleges  $-X$  intenzív- és  $\xi$  extenzív mennyiségpárral jellemzett – kölcsönhatás lép fel, akkor a fenti egyenlet érvényes marad, ha végrehajtjuk a  $-p \rightarrow X$  és a  $V \rightarrow \xi$  változócsereét.
- 4.) Fejezzük ki mérhető mennyiségekkel (hőtágulási együttható, kompresszibilitás, mólhő) egy rendszer  $dT$  hőmérsékletváltozását, ha térfogata adiabatikus, kvázisztatikus folyamat során  $dV$ -vel megváltozik! Mutassuk meg, hogy  $4^\circ\text{C}$  alatt a víz adiabatikus, kvázisztatikus összenyomáskor lehül! ( $dT = -\frac{T\beta_p}{\kappa_T C_V} dV$ ,  $4^\circ\text{C}$  alatt a víznél  $\beta_p < 0$ . *Útmutatás:* írjuk fel az I. főtételt, írjuk be az  $U(T, V)$  függvény teljes differenciálját, alkalmazzuk a belső energia térfogatfüggésére érvényes összefüggést, és a 4.2 pont 6. feladatának eredményét! A víz hőtágulási együtthatója  $4^\circ\text{C}$  alatt negatív.)
- 5.) Feltételezve, hogy  $S = S(p, T)$ , mutassuk ki, hogy  $TdS = nC_p dT - \beta_p TV dp$  ( $\beta_p$  az izobár hőtágulási együttható). (*Útmutatás:* Írjuk fel  $S$  teljes differenciálját, használjuk a  $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_p \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$  matematikai összefüggést, a termodinamika két differenciális összefüggését és  $\beta_p$  definícióját.
- 6.) Az első főtétel és a termodinamika differenciálegyenletei felhasználásával mutassuk meg, hogy ha ismerjük egy állandó anyagmennyiségű rendszer belső energiáját a térfogat és az entrópia függvényeként (vagyis az  $U(S, V)$  függvényt), akkor a rendszer bármely állapotjelzője (nyomás, hőmérséklet, entalpia, stb) megadható  $S$  és  $V$  függvényeként.
- 7.) Mennyivel változik egy  $m$  tömegű,  $T$  hőmérsékletű,  $V$  térfogatú rendszer entrópiája, ha térfogata állandó nyomáson  $dV$  értékkel megnő (az állandó nyomáson mért  $c_p$  fajhőt és a  $\beta_p$  hőtágulási együtthatót ismerjük)? ( $dS = \frac{mc_p}{TV\beta_p} dV$ , *Útmutatás:* Írjuk fel az  $S=S(p, T)$  függvény teljes differenciálját állandó nyomáson, és alkalmazzuk  $c_p$  és  $\beta_p$  definícióját!)
- 8.) Egy rendszer állapotegyenlete  $pV = A(T) + B(T)p + C(T)p^2$ , ahol a hőmérsékletfüggő együtthatók kísérletekből ismertek. Mennyit változik a rendszer

szabad entalpiája és entrópiája, ha a nyomást rögzített  $T$  hőmérsékleten  $p_0$ -ról  $p_1$ -re változtatjuk? ( $\Delta G = A \ln(p_1/p_0) + B(p_1 - p_0) + C(p_1^2 - p_0^2)/2$ ,

$\Delta S = -A' \ln(p_1/p_0) - B'(p_1 - p_0) - C'(p_1^2 - p_0^2)/2$ , ahol a vessző hőmérséklet

szerinti deriváltat jelent. *Útmutatás:* használjuk ki a  $V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$  és az  $S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$

összefüggéseket!)

- 9.) Gumiszalag állapotegyenlete  $f = aT \left[ \frac{\ell}{\ell_0} - \left( \frac{\ell_0}{\ell} \right)^2 \right]$  alakba írható, ahol  $f$  a szalagban

fellépő húzóerő nagysága,  $\ell$  a szalag hossza,  $T$  a hőmérséklet,  $\ell_0$  a szalag erőmentes hossza,  $a$  pozitív állandó. (a) Mutassuk ki, hogy a belső energia nem függ a szalag hosszától! (b) Írjuk fel a termodinamika fundamentális egyenletét, továbbá a szabad energia- és a szabad entalpia megváltozását a gumiszalagra! (c) Mekkora munkát végzünk, és mennyi a gumiszalag által leadott hő, ha a szalag hosszát izotermikus, reverzibilis folyamatban  $\ell_0$ -ról  $2\ell_0$ -ra növeljük. (d) Igazoljuk, hogy a fonal hőmérséklete megnő, ha adiabatikusan megnyújtjuk! ((a) *Útmutatás:* A belső energia térfogatfüggésére kapott általános összefüggés átírható a vizsgált esetre a  $-p \rightarrow f$  és  $V \rightarrow \ell$  helyettesítéssel. (b)  $dU = TdS + fd\ell$ ,  $dF = -SdT + fd\ell$ ,  $dG = -SdT - \ell df$

*Útmutatás:* Alkalmazzuk a fenti változócsereket! (c)  $W = Q_{le} = \int_{\ell_0}^{2\ell_0} fd\ell$ . *Útmutatás:*

Használjuk az I. főtételt, és vegyük figyelembe az (a) részfeladat eredményét!. (d)  $\left(\frac{\partial T}{\partial \ell}\right)_{adiab.} = \frac{f}{C_\ell} > 0$ , ahol  $C_\ell$  az állandó hosszánál mért hőkapacitás. *Útmutatás:*

Hasonlítsuk össze a fundamentális egyenletet és az  $U(T, \ell)$  függvény teljes differenciálját, és vegyük figyelembe az (a) részfeladat eredményét!)

- 10.) Mennyi hő szabadul fel az  $\varepsilon(T)$  dielektromos állandójú dielektrikum polarizációjakor, ha a külső elektromos tér nagyságát állandó hőmérsékleten, kvázistacionáriusan növeljük nulláról egy nem túl nagy  $E$  értékre? A térfogatváltozás elhanyagolható.

( $Q = -\frac{1}{2}T\varepsilon_0 V \frac{d\varepsilon(T)}{dT} E^2$ . *Útmutatás:* használjuk az I. főtétel  $dU = \delta Q + EdP$  alakját,

az  $U(P, T)$  függvény teljes differenciálját, és azt, hogy a belső energia térfogatfüggésére kapott általános összefüggés átírható erre az esetre is a dielektrikum teljes dipólusmomentuma ( $P$ ) segítségével a  $-p \rightarrow E$  és  $V \rightarrow P$  helyettesítéssel:

$\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T = E - T \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P$ . Alkalmazzuk még a  $P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)EV$  összefüggést is.)

#### 4.6 Fázisátalakulások

- 1.) Mutassuk meg, hogy mechanikai- és termikus kölcsönhatásban részt vevő rendszerben állandó nyomáson végbemenő fázisátalakulásnál az átalakulási hő ( $L$ ) az entalpiaváltozással ( $\Delta H$ ) egyenlő. (Útmutatás: használjuk az entalpia definícióját és az első főtételt.)
- 2.) 1 kg víznek normál nyomáson (101,3 kPa) való elforralásához egy elektromos merülőforralón a 220 V-os feszültségforrásból 34,2 percen át 5 A áramot kell átfolyatni. Határozzuk meg a víz (a) entalpia-, (b) entrópia- és (c) belső energia-változását ebben a folyamatban! ( $\Delta H = W_{el} = 2,26$  MJ,  $\Delta S = 6,06$  kJ/K,  $\Delta U = \Delta H - mRT/M = 1,09$  MJ. Útmutatás: (a) használjuk fel az 1.) feladat eredményét, (b) használjuk az entrópia definícióját, (c) írjuk fel az entalpiaváltozás és belső energia-változás összefüggését, hanyagoljuk el a víz térfogatát a gőzéhez képest, és a gőzt tekintsük ideális gáznak. A gázállandó: 8,31 J/(molK)
- 3.) Henger alakú edényben  $T_f = 100$  °C hőmérsékletű telített vízgőz van. Egy súlytalan dugattyú lassú betolásának hatására az edényben  $\Delta m = 0,7$  g víz lecsapódik. Mennyi munkát végeztünk ezalatt az ideális gáznak tekinthető vízgőzön (a folyamat során a nyomás a  $p_k$  külső légnyomással egyenlő)? ( $\Delta W = p_k(V_1 - V_2) = \frac{RT_f}{M} \Delta m = 120$  J)
- 4.) Ábrázoljuk (kvalitatív módon) egy tiszta anyag kémiai potenciáljának  $\mu_p(T)$  hőmérsékletfüggését állandó nyomáson, az anyag szilárd-, folyadék- és gőzállapotát átfogó hőmérséklet-intervallumban. Az olvadáspontot  $T_0$ -lal, a forráspontot  $T_f$ -fel jelöljük, és tegyük fel, hogy a moláris entrópia egy fázison belül nem függ a hőmérséklettől. (Útmutatás: használjuk fel a  $\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S$  egyenletet, a kémiai potenciál és a szabad entalpia összefüggését, továbbá két fázis egyensúlyának feltételét.)
- 5.) Felhasználva, hogy az olvadáspont az állandó nyomáson felvett  $\mu_p - T$  diagramban a szilárd fázisra és a folyadékra érvényes görbék metszéspontjánál van, mutassuk ki, hogy a nyomás növelésekor az olvadáspont nő, ha a szilárd fázis móltérfogata kisebb, mint a folyadéké. Hogyan változik a jég olvadáspontja, a nyomás növelésekor? (Útmutatás: a nyomásváltozás a  $\mu_p - T$  görbét eltolja, mégpedig a két fázisban általában különbözőképpen. A görbe eltolódásának mértékét adott hőmérsékleten, adott fázisban a  $\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_T = V_M$  összefüggés adja meg.)
- 6.) A szilárd-folyadék egyensúlyi görbéjének (olvadási görbe) közelítő meghatározására gyakran használják a  $p = p_1 + \frac{L_M^{olv}}{\Delta V_M^{olv}} \ln \frac{T}{T_1}$  összefüggést ( $T_1$  a  $p_1$  nyomáson,  $T$  a  $p$  nyomáson érvényes olvadáspont, az egyenletben szereplő  $L_M^{olv}$  az anyag moláris átalakulási hője (vagy moláris entalpiaváltozása),  $\Delta V_M^{olv}$  pedig a móltérfogat változása az olvadásnál). (a) Vezessük le ezt az egyenletet, és állapítsuk meg, hogy milyen

feltételek mellett érvényes! (b) Mutassuk ki, hogy a  $T_I$ -hez képest kis  $T - T_I$  érték esetén az egyensúlyi nyomás lineárisan változik a  $T - T_I$  különbséggel! (Útmutatás: (a) integráljuk a Clausius–Clapeyron-egyenletet, (b) használjuk fel a kis  $x$ -ekre érvényes  $\ln(1+x) \cong x$  összefüggést.)

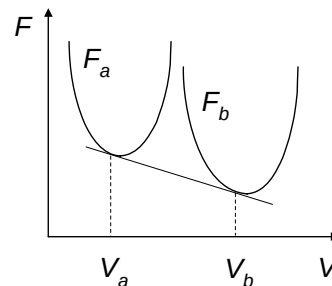
- 7.) Ha a nyomást  $\Delta p = 0,1 \text{ bar}$ -ral megnöveljük, akkor a víz forrási hőmérséklete  $\Delta T \approx 2,8^\circ\text{C}$ -kal növekszik. Ennek felhasználásával becsüljük meg a víz forráshőjét! A vízgőzre alkalmazzuk az ideális gáz egyenletét, és hanyagoljuk el a víz fajlagos térfogatát a gőzéhez képest! ( $L_f \approx \frac{\Delta p}{\Delta T} \frac{RT^2}{p_k M} = 2253 \text{ kJ/kg}$ )

- 8.) A szilárd argon  $p_0 = 1 \text{ bar}$  (atmoszferikus) nyomáson  $T_0 = 83 \text{ K}$  hőmérsékleten olvad meg. Olvadáshője ekkor  $L = 1176 \text{ J/mol}$ , fajlagos térfogatának változása  $dv_0 = 3,5 \text{ cm}^3/\text{mol}$ . A nyomás növekedésekor az olvadáshő nem változik, a  $dv$  fajlagos térfogatváltozás viszont az abszolút hőmérséklet  $3/2$ -ik hatványával arányos. Mekkora nyomást kell alkalmaznunk ahhoz, hogy az olvadási hőmérséklet megkétszereződjék?

$$p - p_0 = \frac{2L}{3dv_0} \left( 1 - \left( \frac{T_0}{T} \right)^{3/2} \right) = 4096 \text{ bar}.$$

Útmutatás: a  $dv$  hőmérsékletfüggésének figyelembe vételével integráljuk a Clausius–Clapeyron-egyenletet.)

- 9.) Homogén anyag adott hőmérsékleten két fázisban (a és b) létezhet. Az egyes fázisok szabad energiáinak térfogattól való függése (rögzített hőmérsékleten, állandó anyagmennyiség esetén) az ábrán látható. Mutassuk ki, hogy egyensúlyi állapotban a fázisok  $V_a$  és  $V_b$  térfogatai a két görbéhez húzott közös érintő érintési pontjainak abszcisszái, a közös nyomás pedig az érintő negatív iránytangense! (Útmutatás: fejezzük ki a nyomást és a kémiai potenciált a szabad energiával ( $p = -\partial F / \partial V$ , ill.  $\mu = (F + pV)/n$ ), és használjuk ki, hogy fázisegyensúlyban a két fázis nyomása és kémiai potenciálja egyenlő.)



## 4. Gyakorló feladatok

Befejezésül, témakörönként csoportosítva, az elméleti ismeretek alkalmazásának gyakorlását szolgáló feladatgyűjteményt adunk, amely egyben a gyakorlati foglalkozások anyagául is szolgál. A feladatok végeredményét az esetek zömében megadjuk, a megoldás menetét azonban nem ismertetjük részletesen, csupán útmutatást adunk a megoldáshoz.

A feladatok többségét különböző tankönyvekből és feladatgyűjteményekből vettük, amelyeknek listáját itt megadjuk. Ezekben a könyvekben további feladatok is találhatók – többnyire a megoldással együtt.

***A feladatok forrásai*** (a felhasznált feladatok mennyiségének sorrendjében):

- 1.) Füstöss L.: Feladatok hőtanból, Műegyetemi Kiadó, Budapest 2000.
- 2.) Horváth Z.–Tél T.: Elméleti fizikai példatár 2., Tankönyvkiadó, Budapest 1983.
- 3.) Kovács I.–Párkányi L.: Fizikai példatár II., Tankönyvkiadó, Budapest 1973.
- 4.) Atkins, P.W.: Fizikai kémia I., Tankönyvkiadó, Budapest 1992.